Université de Jijel, Faculté des Sciences exacte et Informatique, Département de Physique

Examen de théories de jauge   Samedi 03/02/2018, Durée 3h30
Master 2 physique théorique   Année universitaire 2017-2018

L'examen comprend des questions de cours et deux problèmes indépendants. Le premier problème porte sur la production d'un boson W dans les collisions proton-proton. Le deuxième problème est sur la renormalisation de la théorie $\lambda\,\Phi^3$ à six dimensions. Un appendice contient les règles de Feynman. On rappelle aussi les intégrales sur le quadri-moment tournant dans une boucle.

(I) Questions de cours

(1) **Champ de Proca:** On considère un champ relativiste $A^\mu(x)$ vectoriel et massif (ç.à.d. de spin-1 et de masse m). La densité lagrangienne décrivant la dynamique de ce dernier est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - A_\mu J^\mu. \tag{1}$$

où $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, et J^μ est le courant (est constant par rapport au champ A_μ).

(a) Montrer que la densité lagrangienne libre ($J^\mu \equiv 0$) n'est pas invariante sous la transformation de jauge:

$$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \theta(x)$$

(b) A l'aide des équations d'Euler-Lagrange, écrire l'équation d'évolution du champ A_μ. Montrer que cette équation ne conduit pas à la conservation du courant J_μ.

(c) On suppose, maintenant, que le courant est conservé (ç.à.d. $\partial^\mu J_\mu = 0$). Montrer que A_μ satisfait les équations

$$\partial_\mu A^\mu(x) = 0, \qquad (\partial^2 + m^2)A^\mu(x) = J^\mu(x). \tag{2}$$

(d) Calculer la dimension, dans le système d'unités naturelles (ç.à.d. $\hbar = c = 1$), du champ A_μ et le courant J_μ si la dimension de l'espace-temps est égale à 4 et $4 - 2\epsilon$.

(2) **Couleur et groupe $SU(3)$:** Dans la représentation fondamentale, les générateurs (T^a pour $a = 1, 2, \cdots 8$) du groupe de Lie $SU(3)$ vérifient les relations suivantes,

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \qquad \{T^a, T^b\} = \frac{\delta_{ab}}{3}\cdot \mathbb{I}_3 + d^{abc}T^c, \qquad \mathrm{Tr}[T^a T^b] = \frac{\delta_{ab}}{2}. \tag{3}$$

où f^{abc} sont anti-symétriques et d^{abc} sont symétriques par permutation de deux indices.

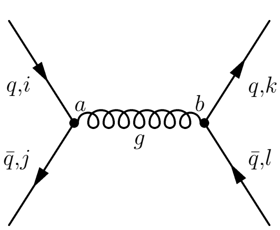
(a) Définir les représentations fondamentale et adjointe de $SU(3)$? Quel est le lien entre ces représentations et les particules fondamentales (quarks et gluons).

(b) Montrer que la trace des générateurs T^a est nulle.

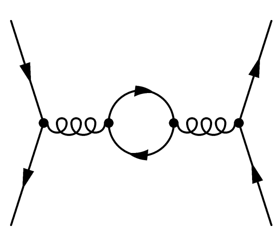
(c) On appelle opérateur de *Casimir* dans la représentation fondamentale, l'opérateur C_F qui doit vérifier $[C_F, T^c] = 0$. Montrer que l'opérateur $C_F = \sum_a T^a T^a$ est un opérateur de *Casimir*. Calculer C_F et $\mathrm{Tr}(C_F)$ dans cette représentation.

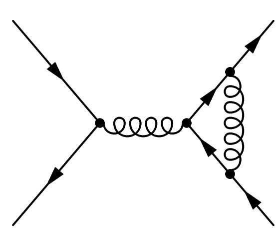
(d) Montrer que, dans la représentation adjointe, l'opérateur de Casimir est $C_A = 3\cdot \mathbb{I}_8$ (généralisation de C_F).

(e) On note les amplitudes associées aux diagrammes de Feynman suivants, M_a, M_b et M_c, respectivement.



(a)

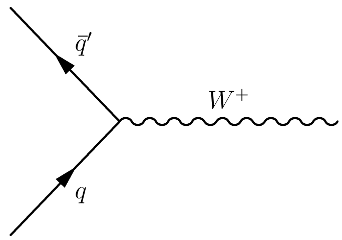

(b)


(c)

Calculer les facteurs de couleur de: $\overline{\sum}|M_a|^2$, $\overline{\sum}(M_a\bar{M}_b)$ et $\overline{\sum}(M_a\bar{M}_c)$.

(II) Problème 1: Production d'un boson W dans les collisions proton-proton

A l'ordre le plus bas en théorie des perturbations, le boson W est produit par l'annihilation quark-antiquark $q(p_1) + \bar{q}'(p_2) \to W(p_W)$.



Les quarks et antiquarks sont tous supposés de masse nulle.

(1) Supposant qu'un proton est formé de quarks u, d, s, c et d'antiquarks $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}$, quelles sont les combinaisons possibles de q et de $\bar{q}'$ qui peuvent produire un boson W. Calculer l'élément de matrice au carré sommé/moyenné sur les spins et la couleur.

(2) Calculer la section efficace totale au niveau partonique et montrer qu'elle est proportionnelle à une fonction δ. Calculer la section efficace totale au niveau hadronique en introduisant les fonctions de structure appropriées $F_q(x_i)$ et $F_{\bar{q}'}(x_j)$ ou $i, j = 1, 2$ et x_1 et x_2 sont les fractions d'impulsion portées par les partons dans le proton 1 et le proton 2..

(3) A l'ordre suivant (premier ordre) en QCD, quels sont les deux processus réels à considérer pour la production d'un boson W. Tracer les diagrammes de Feynman correspondants (chaque processus comprend deux diagrammes de Feynman). On rappelle que le proton contient aussi des gluons. Ecrire l'élément de matrice pour l'un des deux processus.

(4) Ecrire l'élément de matrice au carré sommé/moyenné sur les spins et les couleurs. Montrer sans évaluer explicitement les traces que les termes en γ_5 ne contribuent pas quand on somme sur la polarisation du W. On utilisera la jauge de Feynman pour la somme sur la polarisation du gluon.

(5) Au premier ordre en QCD tracer, sans les calculer, les diagrammes virtuels (avec boucle) à considérer pour avoir un calcul complet.

(III) Problème 2: Renormalisation à une boucle de la théorie $\lambda\, \Phi^3$ en 6 dimensions

La densité Lagrangienne, en fonction des quantités nues, s'écrit:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, \partial_\mu\, \Phi_B\, \partial^\mu\, \Phi_B - \frac{1}{2}\, m_B^2\, \Phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{3!}\, \Phi_B^3 \tag{4}$$

$\Phi_B = \Phi_B(x)$ scalaire réel. On considère la théorie en 6 dimensions, de telle sorte que le lagrangien, sans dimension, est relié à la densité lagrangienne par $\mathbf{L} = \int dx^6\, \mathcal{L}$.

(0) Calculer la dimension, en terme de masse $[\hbar = c = 1]$, du champ et du couplage dans un espace à 6 dimensions.

Dans la suite du problème, pour effectuer la renormalisation on travaillera en n dimensions. Les règles de Feynman sont données en appendice.

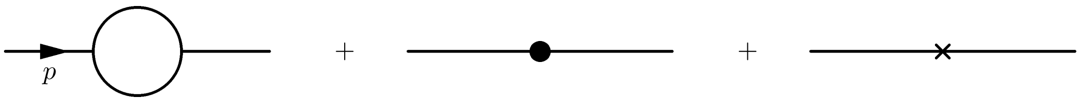
(1) Calculer la dimension, en terme de masse, du champ et du couplage dans un espace à $n = 6 - 2\,\epsilon$ dimensions.

(2) Introduisant les relations entre paramètres nus (Φ_B, m_B, λ_B) et les paramètres renormalisés (Φ, m, λ)

$$\Phi_B = Z_3^{1/2}\, \Phi\ ; \quad m_B^2 = \frac{Z_0}{Z_3}\, m^2\ ; \quad \lambda_B = \frac{Z_1}{Z_3^{3/2}}\, \lambda\, \mu^\epsilon$$

écrire la densité Lagrangienne (4) en fonctions des Φ, m, λ et des $\delta\, Z_i = Z_i - 1$.

(3) Considérant la fonction à deux points (self-énergie), calculer Z_0 et Z_3, dans l'approximation à une boucle, dans le schéma $\overline{MS}$. Pour cela on considérera



$$-i\,\Pi(p) \quad + \quad -i\,(Z_3-1)\,p^2 \quad + \quad i\,(Z_0-1)\,m^2$$

(IV) Appendices

- **Appendice pour les questions de cours:**
  - Équations d'Euler-Lagrange la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\partial\phi_r, \partial_\mu\phi_r)$:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r(x)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r(x))} = 0, \qquad \text{pour} \quad r = 1, 2, \cdots. \tag{5}$$

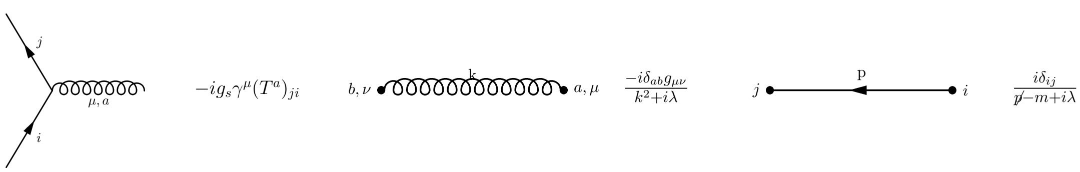
  - Couleur et matrices de Gell-Man:

$$d^{aac} = 0, \qquad f^{acd} f^{bcd} = 3\delta_{ab}, \qquad \mathrm{Tr}[T^a T^b T^a T^c] = -\frac{1}{4N}\delta_{bd}. \tag{6}$$

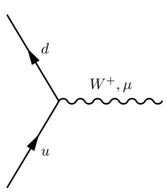
  - Spineurs de Dirac et couleurs:

$$\sum_s u_i \bar{u}_k \propto \delta_{ij}, \qquad \sum_s v_i \bar{v}_k \propto \delta_{ij}. \tag{7}$$

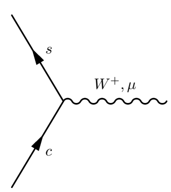
  - Règles de Feynman en QCD:



- **Appendice pour le problème 1:**
  - Vertex quark-quark-boson W:



$$-i\frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}\gamma^\mu(1-\gamma_5)$$



$$-i\frac{e}{2\sqrt{2}\sin\theta_W}\gamma^\mu(1-\gamma_5)$$

  - Somme sur la polarisation du boson W:

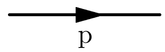
$$\sum_{\lambda=1,2,3} \epsilon_\mu^\lambda(p)\epsilon_\nu^\lambda(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M_W^2} \tag{8}$$

  - Section efficace partonique:

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}\,|M|^2\,\frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\cdots\frac{d^3\vec{p}_n}{(2\pi)^3 2E_n}\,(2\pi)^4\delta^4(p_3+p_4+\ldots+p_n-p_1-p_2) \tag{9}$$

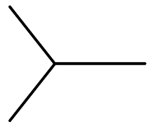
- **Appendice pour le problème 2:**

– Propagateur:



$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\,\lambda}$$

– Vertex:

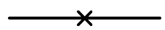


$$-\,i\,\lambda\,\mu^{\epsilon}$$

– Contre terme de la fonction d'onde:

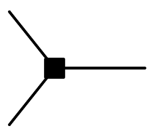
$$-\,i\,(Z_3 - 1)\,p^2$$

– Contre terme de masse:



$$i\,(Z_0 - 1)\,m^2$$

– Contre terme de vertex:



$$-\,i\,\lambda\,\mu^{\epsilon}\,(Z_1 - 1)$$

– On rappelle les intégrales:

$$\begin{aligned} I(r,m) &= \int \frac{d^n k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{(k^2)^r}{[k^2 - R^2 + i\,\lambda]^m} \\ &= i\,\frac{(-1)^{r-m}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\,\left(R^2 - i\lambda\right)^{r-m+\frac{n}{2}}\,\frac{\Gamma(r+\frac{n}{2})\,\Gamma(m-r-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(m)}. \end{aligned}$$

– On trouvera:

$$\begin{aligned} Z_0^{\overline{MS}} - 1 &= -\frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2}{(4\,\pi)^3}\,\left(\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\,\pi) - \gamma\right) \\ Z_3^{\overline{MS}} - 1 &= -\frac{1}{12}\,\frac{\lambda^2}{(4\,\pi)^3}\,\left(\frac{1}{\epsilon} + \ln(4\,\pi) - \gamma\right) \end{aligned}$$

P. Aurenche et M. S. ZIDI

Bon courage

پـ . ارونش و مـ . صـ . زيدي

بِالتّوفيق