(I) Questions de cours

On considère une seule saveur de quarks. Alors, la densité lagrangienne libre de Dirac des champs de quarks s'écrit

$$\mathcal{L}_d = \overline{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi = \sum_{i=r,g,b} \overline{\psi}_i(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi_i \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix}. \tag{1}$$

où r, g, b désignent les couleurs de quarks (red, green, blue).

(1) Pourquoi les théories de jauge sont importantes en physique des particules.

(2) **Symétrie baryonique et groupe** $U(1)$**:** **(a)** Montrer que la densité lagrangienne $\mathcal{L}_d$ est invariante sous la transformation locale $\psi_i' \to e^{-i\alpha}\psi_i$ ($\alpha = \text{cst}$). **(b)** Montrer que le courant de Noether, associé à cette transformation, est donné par $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$. **(c)** Calculer le nombre baryonique, $B = \frac{1}{3}\int d^3x j^0$, des quarks.

(3) **Transformation de jauge non-abélienne et groupe** $SU(3)$**:** Considérons la transformation de jauge non-abélienne suivante

$$\psi'(x) \longrightarrow G(x)\psi(x), \qquad G(x) = \exp(-i\alpha_a T^a), \qquad [T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \tag{2}$$

(a) Que représentent les quantités α_a, T^a. Donner les valeurs possibles de a. **(b)** Montrer que la densité lagrangienne $\mathcal{L}_d$ est invariante sous cette transformation si α_a est indépendant de x. **(c)** Montrer que $\mathcal{L}_d$ n'est pas invariant si $\alpha_a \equiv \alpha_a(x)$. Calculer $\delta\mathcal{L}_d = \mathcal{L}_d' - \mathcal{L}_d$ dans ce cas.

(4) On remplace la dérivé normale par la dérivé covariante $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a(x)T^a$. Montrer que la nouvelle densité lagrangienne est invariante sous la transformation de jauge locale $G(x)$, et que le champ A_μ^a doit se transformer sous la forme

$$A_\mu^{a\prime} = A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial\alpha_a(x) + f^{abc}\alpha_b A_\mu^c. \tag{3}$$

(5) On introduit le terme cinétique du champ de gluons,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \qquad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^a. \tag{4}$$

montrer que ce terme est invariant sous la transformation (3).

(6) Discuter la quantification de cette théorie.

(II) Problème: production d'une paire de b-quark

Le but de cet exercice est d'étudier le processus d'annihilation d'une paire $q\bar{q}$ en paire $b\bar{b}$, au niveau partonique, à l'ordre de Born en QED (par l'échange d'un photon virtuel), en QCD (par l'échange d'un gluon virtuel). On néglige les masses des quarks de l'état initial, et on note la masse du quark bottom par m_b.

(١) **La réaction** $q(p_1)\bar{q}(p_2) \to b(p_3)\bar{b}(p_4)$ **par l'échange d'un photon** γ**:**

(1) Tracer le diagramme de Feynman correspondant.

(2) Écrire l'amplitude $\mathcal{M}^{(\gamma)}$ et le conjugué de cette amplitude.

(3) Calculer le carré de cette amplitude $\overline{\sum}|\mathcal{M}^{(\gamma)}|^2$ et l'exprimer en terme des variables de Mandelstam.

(4) Calculer la section efficace partonique $\hat{\sigma}^{(\gamma)}$ de cette réaction.

(٢) La réaction $q(p_1)\bar{q}(p_2) \to b(p_3)\bar{b}(p_4)$ par l'échange d'un gluon G:

(1) Tracer le diagramme de Feynman correspondant.
(2) Écrire l'amplitude $\mathcal{M}^{(G)}$ et le conjugué de cette amplitude.
(3) Calculer le carré de cette amplitude $\overline{\sum}|\mathcal{M}^{(G)}|^2$ et l'exprimer en terme des variables de Mandelstam.
(4) Calculer la section efficace partonique $\hat{\sigma}^{(G)}$ de cette réaction.

(III) Appendices

- Courant de Noether pour la densité lagrangienne $\mathcal{L}(\partial\phi_r, \partial_\mu \phi_r)$:

$$j^\mu = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \delta\phi_r. \tag{5}$$

  où ϕ_r (pour $r = 1, 2, \cdots$) sont les champs de la théories.

- Propriétés des matrices de Dirac:

$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma}) \tag{6}$$

- Traces des matrices de Gell-man:

$$Tr[T^a T^b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \tag{7}$$

- Spineur de Dirac:

$$\sum_s \bar{u}_{si}(p) u_{sj}(p) = (\not{p} + m)\delta_{ij}, \qquad \sum_s \bar{v}_{si}(p) v_{sj}(p) = (\not{p} - m)\delta_{ij}. \tag{8}$$

- Variable de Mandelstam:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \qquad t = (p_1 - p_3)^2, \qquad u = (p_2 - p_3)^2. \tag{9}$$

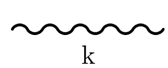
- Section efficace $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{|\vec{p}_3|^2 d|\vec{p}_3|}{2E_3} \sin(\theta) d\theta d\phi \delta^+((p_1 + p_2 - p_3)^2) \overline{\sum}|\mathcal{M}|^2. \tag{10}$$

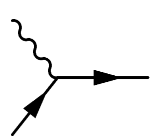
- Référentiel du centre de masse:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1), \qquad p_2 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1), \qquad p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \sin(\theta), 0, \cos(\theta)). \tag{11}$$

- Règles de Feynman en QED (en jauge de Feynman):

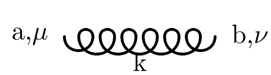


$$\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 + i\lambda}$$

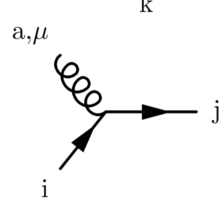


$$-iee_q\delta_{ij}\gamma^\mu$$

- Règles de Feynman en QCD (en jauge de Feynman):



$$\frac{-ig^{\mu\nu}\delta^{ab}}{k^2 + i\lambda}$$



$$-i\,g\,(T^a)_{ji}\,\gamma^\mu$$

M. S. ZIDI
Bon courage