Université de Jijel, Faculté des Sciences exactes et Informatique, Département de Physique
Interrogation, Théories de Jauge — *Durée 2h00, Documents autorisés*
Master 2 physique théorique — *Dimanche 14/02, 2021*

(I) Problème 1: Théories de Yang-Mills *(10pts)*

Considérons une théories de Yang-Mills basée sur le groupe de jauge $SU(N)$. La densité lagrangienne de Dirac libre associée à cette théorie est la suivante:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\psi, \qquad \text{avec} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \tag{1}$$

(1) Montrer que la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ est invariante sous la transformation de jauge globale:

$$U(\vec{\alpha}) = \exp(i\vec{\alpha}\cdot\vec{t}), \qquad \vec{t} \equiv (t^1, t^2, \cdots, t^{N^2-1}), \qquad \vec{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{N^2-1}). \tag{2}$$

où t^a (pour $a = 1, 2, \cdots, N^2-1$) sont les générateurs de $SU(N)$ et α_a sont les paramètres du groupe (des constantes arbitraires). On rappelle que les générateurs de ce groupe vérifient la relation de commutation suivante:

$$[t^a, t^b] = i f_{abc} t^c \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}[t^a t^b] = \delta_{ab}/2. \tag{3}$$

où f_{abc} sont les constantes de structure (anti-symétrique par échange d'indices).

(2) Montrer que le courant de Noether correspondant est:

$$\vec{J}^\mu \approx \overline{\psi}\gamma^\mu \vec{t}\psi. \tag{4}$$

(3) Montrer que pour que la densité lagrangienne suivante:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(iD_\mu\gamma^\mu - m)\psi \qquad \text{avec} \qquad D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbb{G}_\mu \tag{5}$$

soit invariante sous la transformation de jauge locale (ç.à.d. $\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}(x)$). Il faut que

$$\mathbb{G}'_\mu = U(x)\mathbb{G}_\mu U^{-1}(x) + \frac{i}{g}[\partial_\mu U(x)]U^{-1}(x) \qquad \text{avec} \qquad \mathbb{G}_\mu = \vec{t}\cdot\vec{G}_\mu = t^a G^a_\mu. \tag{6}$$

où G^a_μ (pour $a = 1, 2, \cdots, N^2-1$) sont les champs de jauge.

(4) Utiliser la transformation infinitésimale et la relation de commutation (3) pour montrer que:

$$G^{c\prime}_\mu = G^c_\mu + f_{abc}\alpha^b(x)G^a_\mu - \frac{\partial_\mu \alpha^c(x)}{g}. \tag{7}$$

(5) Le terme cinétique des bosons de jauge s'écrit sous la forme:

$$-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}] \qquad \text{avec} \qquad \mathbb{F}_{\mu\nu} = t^a F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbb{G}_\nu - \partial_\nu\mathbb{G}_\mu - ig[\mathbb{G}_\mu, \mathbb{G}_\nu] \tag{8}$$

montrer qu'il est invariant sous la transformation de jauge locale.

(6) Discuter brièvement les modèles (où les théories) basées sur les groupes $SU(2)$ $(N = 2)$ et $SU(3)$ $(N = 3)$.

(II) Problème 2: Réaction $q\bar{q} \to q\bar{q}$ en QCD *(10pts)*

Considérons le sous-procssus partonique suivant:

$$q(p_1) + \bar{q}(p_2) \to q(p_3) + \bar{q}(p_4). \tag{9}$$

On néglige les masses de tous les quarks $(m_q = 0)$ et on suppose que tous les quarks sont identiques.

(1) Tracer les deux diagrammes de Feynman décrivant ce processus en QCD.

(2) Écrire les amplitudes associées et leurs complexes conjuguées.

(3) Calculer le carré de l'amplitude totale sommé et moyenné sur les spin et les couleurs ($\overline{\sum}|M|^2$).

(4) Re-exprimer $\overline{\sum}|M|^2$ en fonction des variables de MandelStam:

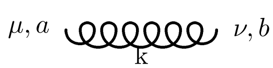
$$s = (p_1 + p_2)^2 \qquad t = (p_1 - p_3)^2 \qquad u = (p_1 - p_4)^2. \tag{10}$$

(5) Calculer la section efficace partonique différentielle $d\hat{\sigma}/dt$.

(III) Appendices

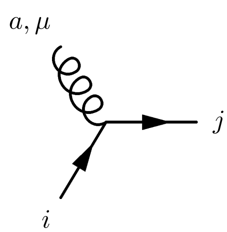
- Règles de Feynman en QCD
  - Propagateurs externes des quarks et anti-quarks:

  - Propagateur du gluon (jauge de Feynman):



$$-\,i\delta_{ab}\frac{g^{\mu\,\nu}}{k^2 + i\,\lambda}$$

  - Vertex quark-quark-gluon:



$$-\,i\,g_s\,\gamma^\mu (T^a)_{ji}$$

- Matrices de Gell-Mann:

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \frac{\delta_{ab}}{2} \qquad \mathrm{Tr}(T^a T^b T^a T^d) = -\frac{1}{4N}\delta_{bd}. \tag{11}$$

- Matrices de Dirac:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, && && \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\lambda) = 4(g^{\mu\nu}g^{\sigma\lambda} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\sigma})\\
&\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma^\mu - 2\gamma_\alpha && \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma^\mu = -4g_{\alpha\beta} && \gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\delta\gamma^\mu = -2\gamma_\delta\gamma_\beta\gamma_\alpha.
\end{aligned} \tag{12}$$

- Section efficace:

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \int \overline{\sum}|M|^2\,\frac{d^3\vec{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3}\frac{d^3\vec{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}\,(2\pi)^4\delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \tag{13}$$

- Fonction δ de Dirac:

$$\delta[g(x)] = \frac{\sum_i \delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}. \tag{14}$$

où x_i sont les racines de $g(x) = 0$.

M. S. ZIDI
Bon courage, بِالتّوفيق