

## Chapitre 02 (4 semaines)

# Analyse et synthèse des filtres analogiques

## 2.1) Introduction

Les signaux sont présents partout autour de nous. L'analyse du signal est au cœur des mathématiques appliquées et permet de décoder l'information. Un des principaux outils est l'analyse des fréquences et décode l'information d'un signal à partir du son domaine fréquentiel. Dans ce chapitre nous allons présenter les notions liées à l'opération du filtrage, l'analyse et la synthèse des filtres analogiques.

Par exemple en électronique, on a besoin de traiter des signaux provenant des différentes sources (capteurs de température, signaux audio, ... etc.).

Un bruit indésirable entamant un signal provenant soit de la chaîne de transmission, soit des composants qui constituent le circuit électrique, ...etc.

Le filtrage est l'opération qui consiste à séparer les composantes spectrales d'un signal selon leurs fréquences.

Prenant l'exemple de l'antenne d'un récepteur radio simple capte plusieurs signaux provenant des différents émetteurs.

## 2.2) Filtrage des signaux

Par exemple en électronique, on a besoin de traiter des signaux provenant des différentes sources (capteurs de température, signaux audio, ... etc.).

Un bruit indésirable entamant un signal provenant soit de la chaîne de transmission, soit des composants qui constituent le circuit électrique, ...etc.

L'antenne d'un récepteur radio simple capte plusieurs signaux provenant des différents émetteurs.

Le signal d'entrée dans ce cas est la somme de plusieurs signaux émis et seule l'utilisation d'un filtre passe-bande permet la sélection de la station choisie.

→ Le filtrage est l'opération qui consiste à séparer les composantes spectrales d'un signal selon leurs fréquences son rôle est la séparation des signaux utiles des signaux indésirables.

L'objectif du filtrage donc, est de modifier le spectre de fréquence des signaux pour éliminer ou renforcer certaines gammes ou bandes de fréquences.

- ⇒ Un filtre est un circuit qui apporte une modification de l'amplitude et (ou) de la phase des composantes spectrales du signal en question, donc c'est un sélecteur de fréquences et la bande de fréquences transmises s'appelle bande passante du filtre.
- ⇒ Les filtres sont des systèmes linéaires, caractérisés par des équations différentielles linéaires à coefficients constants.
- ⇒ Un filtre est un système linéaire invariant dans le temps permettant de diviser le spectre (espace fréquentiel) afin de conserver une ou plusieurs (bande) de ce spectre.
- ⇒ Les filtres sont caractérisés par leurs fonctions de transfert et peuvent être classés en cinq familles suivant la bande de spectre des fréquences sur laquelle ils agissent :

- Passe-bas
  - Passe-bande
  - Passe-haut
  - Coupe bande
  - Passe tout
- ⇒ Ils peuvent être étudiés par leur transmittance de Laplace, pour ce qui est de leur comportement temporel (réponse impulsionnelle, réponse indicielle), ou par leur fonction de transfert harmonique, pour ce qui est de leur comportement en fréquence.
- ⇒ Les applications des filtres dans le monde actuel sont très nombreuses : communications (pour le démultiplexage des signaux, entre autres), électroacoustique, etc. La tendance est aujourd’hui au filtrage numérique, plus précis et plus reproductible, sauf dans certains domaines comme l’instrumentation, l’électronique de puissance, l’électroacoustique, les systèmes haute-fréquence.

**Exemples d’applications:** La transmission d’un message radio de qualité téléphonique (300Hz-3400Hz) par voie hertzienne sur une porteuse à 27 MHz en modulation d’amplitude. Le signal modulé occupe une bande de 6800 Hz autour de la fréquence porteuse. A la réception, la sélection de la bande de fréquences pour laquelle le récepteur est conçu nécessite un filtrage passe-bande.

→ On classe en général les filtres en deux grandes familles :

- ⇒ **Filtres analogiques** : réalisés à partir des composants électroniques passifs (résistance, inductance et condensateur) ou actifs (A.O.).
- ⇒ **Filtres numériques** : réalisés à partir de structures intégré microprogrammable.

→ La réalisation des filtres peut être faite à base de résistance, condensateurs et inductances, on parle alors de **filtres passifs**, en opposition avec les **filtres actifs** qui comportent en plus des composants actifs (transistors et amplificateurs par exemple).

### 2.3) Filtre idéal et filtre réel

Le filtre idéal permet de transmettre sans distorsion une partie de spectre (bande passante) et bloque toutes les autres parties (bande coupée), avec un passage abrupt (discontinuité) entre ces deux parties.

Autrement dit, Un filtre idéal transmettrait toutes les composantes utiles **sans atténuation ni déphasage** (donc **sans retard**) tout en éliminant complètement les signaux indésirables.

Le filtre idéal avec une discontinuité dans sa fonction de transfert n'est pas physiquement réalisable, car sa réponse impulsionnelle nécessiterait que l'évolution du signal de sortie anticipe l'évolution du signal appliqué en entrée (système non causal).

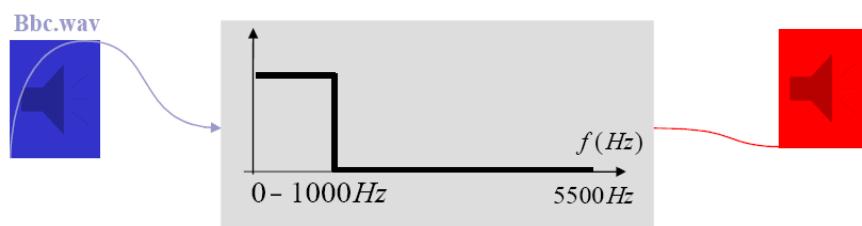


Fig.2.2 : Filtrage idéal passe-bas d'un son

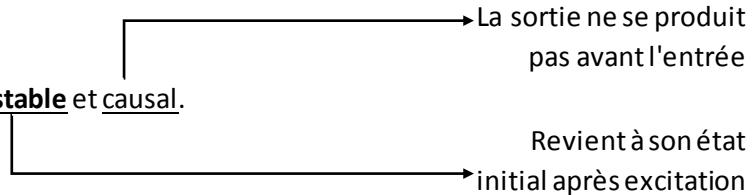
La fréquence de coupure  $f_c$  de ce filtre idéal est de 1000Hz. Il permet l'élimination des fréquences supérieures à  $f_c$  et sa Bande passante (BP) est  $[0, f_c]$ .

La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquence dans lequel son gain  $G(f)$  est supérieur à un gain de référence (par exemple -3dB).

La bande passante à  $-3\text{dB}$  est La bande passante d'un filtre est l'intervalle de fréquence dans lequel son gain  $G(f)$  est supérieur à un gain de référence (par exemple  $-3\text{dB}$ ).

La bande passante à  $-3\text{dB}$  est  $\{f : 20\log \frac{|H(f)|}{\max(|H(f)|)} \geq -3\}$ .

Un filtre est physiquement réalisable s'il est stable et causal.



Soit le filtre passe-bas idéal

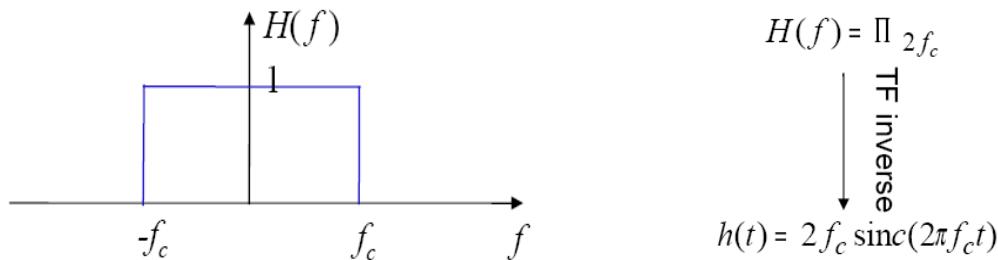


Fig.2.3 : Réponse impulsionnelle du filtre

Donc pour un Dirac en 0, la réponse impulsionnelle  $h(t)$  va de  $-\infty$  à  $+\infty$ , elle commence donc avant la cause ! Le système est NON CAUSAL.

- Ce filtre n'est pas physiquement réalisable,
- Nécessité de trouver une approximation du filtre idéal.

En pratique, la synthèse du filtre idéal est impossible. Discontinuités/dérivées infinies en fréquence  $\rightarrow$  réponse impulsionnelle non causale = non physiquement réalisable  $\rightarrow$  Approximation du filtre idéal.

L'atténuation nulle dans la bande passante, l'atténuation infinie dans la bande atténuee et des transitions verticales donnent une caractéristique de réponse irréalistique.

Les filtres analogiques réels présentent donc des imperfections avec lesquelles il faut trouver des compromis en fonction de son application :

- Transition progressive entre la bande passante et la bande coupée.
- Irrégularité du gain dans la bande passante (ondulations).
- Affaiblissement dans la bande coupée.
- Irrégularité du gain dans la bande coupée (ondulations).
- Irrégularité du temps de propagation.

Les compromis faits sur ces différentes imperfections peuvent être regroupés sur un graphique caractérisant le filtre et appelé **gabarit du filtre**. Ce gabarit fixe les limites de la **fonction de transfert** du filtre à réaliser, il en existe une infinité. Donc, nous sommes amenés à définir un **gabarit**, précisant (Une zone dans laquelle doit passer sa courbe fréquentielle, la bande passante et la bande atténuee (ou rejetée), les ondulations maximales admissibles dans la bande passante  $A_{\min}$  et l'atténuation minimale dans la bande rejetée  $A_{\max}$ ):

- $A_{\max}$  : Atténuation maximum tolérée en bande passante
- $A_{\min}$  : Atténuation minimum en bande coupée
- $f_p$  : fréquence de coupure
- $f_a$  : fréquence de frontière

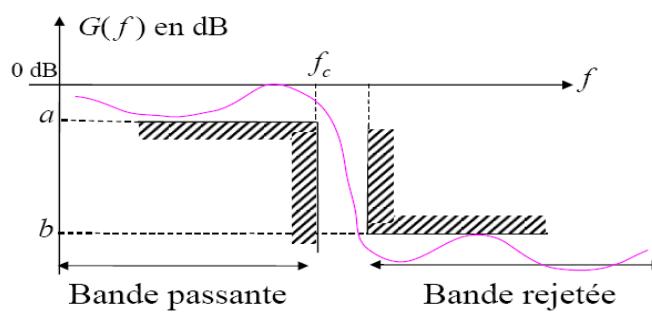


Fig.2.4: Gabarit d'un filtre passe-Bas réel

Afin de faciliter les calculs en vu de la réalisation des filtres, on peut toute fois moyennant un changement de variable (**Transposition**) se ramener à un filtre passe-bas, puis un second changement de variable (**normalisation**) se ramener à un gabarit dont la fréquence (**pulsation**) à la limite de la bande passante vaut 1 (sans unité).

## 2.4) Nature fréquentielle des filtres (idéals et réels)

### 2.4.1) Filtre Passe-Bas

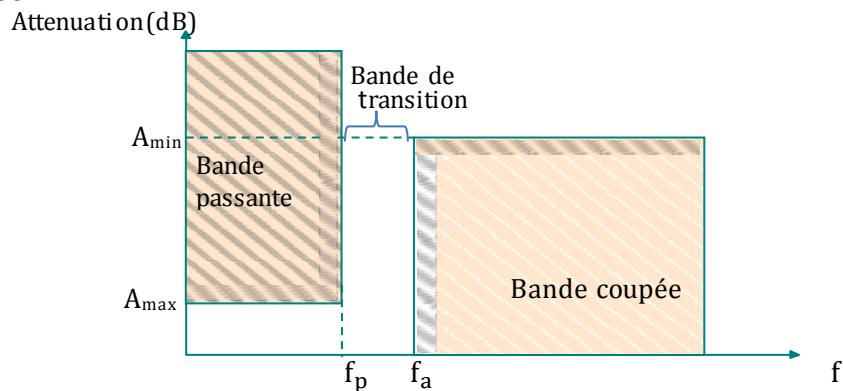


Fig.2.5 : Gabarit d'un filtre passe-bas

**Remarque :** Dans certains filtres, l'atténuation à la fréquence  $f_p$  est inférieure à 3dB. Aussi, la fréquence de coupure peut être différente de celle pour laquelle l'atténuation est égale à 3dB.

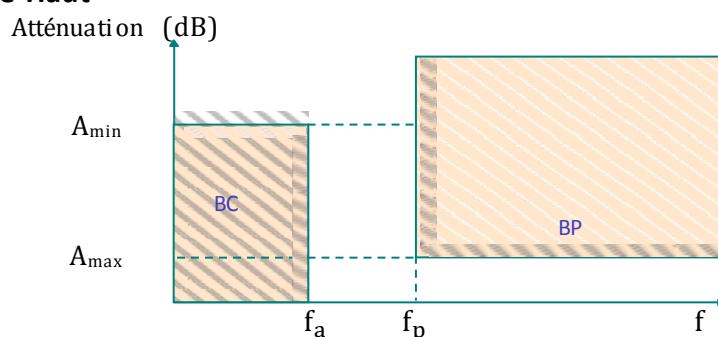
Pour un passe-bas, la notion de sélectivité est définie par :

$$k = \frac{f_p}{f_a} \quad (2.1)$$

$k < 1$  dans le cas d'un filtre réel et  $k = 1$  dans le cas du filtre idéal.

$k$  donne une indication de la largeur de la bande de transition. Plus  $k$  est grande, plus le filtre est sélectif.

### 2.4.2) Filtre Passe-Haut



$$\text{Sélectivité: } k = \frac{f_a}{f_p} \quad (2.2)$$

Fig. 2.6 : Gabarit d'un filtre passe-haut

### 2.4.3) Filtre Passe-Bande

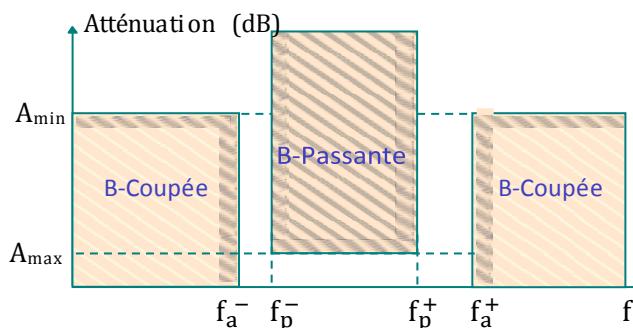


Fig.2.7 : Gabarit d'un filtre passe-bande

✓ Sélectivité :  $k = \frac{\Delta f_p}{\Delta f_a} = \frac{f_p^+ - f_p^-}{f_a^+ - f_a^-}$  (2.3)

✓ Fréquence centrale :  $f_0 = \sqrt{f_p^+ \cdot f_p^-}$  (2.4)

✓ Largeur de bande :  $\Delta f_p = f_p^+ - f_p^-$  (2.5)

✓ Largeur de bande relative :  $B = \frac{\Delta f_p}{f_0}$  (2.6)

Lors du calcul du filtre, il faut disposer d'un gabarit symétrique.

Un passe-bande est symétrique si :

$$f_p^+ \cdot f_p^- = f_a^+ \cdot f_a^- = f_0^2 \quad (2.7)$$

Pour symétriser le gabarit on calcule le produit  $f_p^+ \cdot f_p^-$ . Si le produit  $f_a^+ \cdot f_a^-$  est inférieur, alors on augmente  $f_a^-$ . Dans le cas où il est supérieur, on diminue  $f_a^+$ . On adopte un gabarit plus contraignant que celui prévu au départ. De même, si une atténuation minimale a été définie pour chaque bande coupée, on fixe :  $A_{min} = \max(A_{min1}, A_{min2})$ .

### 2.4.4) Filtre Coupe-Bande

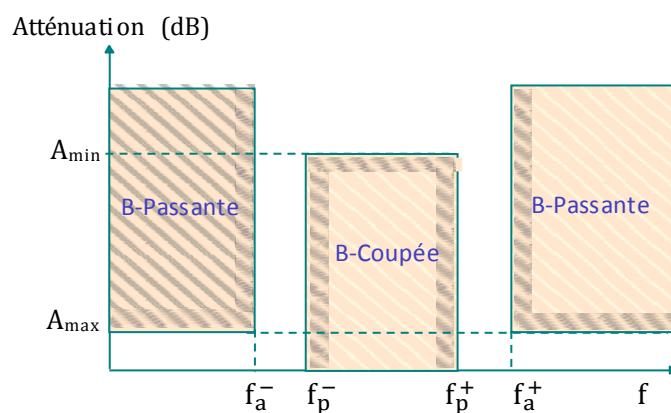


Fig.2.8 : Gabarit d'un filtre coupe-bande

✓ Sélectivité :  $k = \frac{\Delta f_a}{\Delta f_p} = \frac{f_a^+ - f_a^-}{f_p^+ - f_p^-}$  (2.8)

✓ Fréquence centrale :  $f_0 = \sqrt{f_p^+ \times f_p^-}$  (2.9)

✓ Largeur de bande relative :  $B = \frac{\Delta f_p}{f_0}$  (2.10)

### 2.4.5) Filtre Coupe-Tout

Un filtre passe-tout idéal ne possède pas une bande atténuée. Il passe toutes les fréquences comprises entre la fréquence nulle et la fréquence infinie. Le filtre passe-tout est employé pour produire un certain déphasage sur le signal filtré sans changer son amplitude.

## 2.5) Fonction de transfert des filtres

La fonction de transfert d'un filtre s'écrit comme suit :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (2.11)$$

- Tout système réel doit vérifier :  $n \geq m$ .
- Pour que le filtre soit stable, il faut que tous les pôles soient à partie réelle négative.
- L'ordre du filtre est  $n$  (ordre de dénominateur).
- Toutes les fonctions de transfert sont décomposables en des fonctions de transfert des éléments élémentaires (du premier et deuxième ordre).

Il existe de nombreuses fonctions mathématiques, appelées **fonctions d'approximations (polynomiales ou non)**, pouvant répondre aux exigences du gabarit normalisé. Les principales fonctions d'approximations sont les suivantes :

- Fonction de Butterworth (polynomial).
- Fonction de Chebyshev (polynomial).
- Fonction de Bessel (polynomial).
- Fonction de Cauer (non polynomial)...etc.

Remplaçant  $p$  par  $jw$  dans l'équation (2.1) on aura alors :

$$H(jw) = \frac{N(jw)}{D(jw)} = A(w)e^{j\varphi(w)} \quad (2.12)$$

C'est la décomposition en réponse en amplitude et en réponse en phase.

On définit également l'affaiblissement  $A_f(w)$ , mesuré en décibels et le temps ou délai de groupe  $\tau(w)$ , mesuré en secondes :

$$A_f(w) = -20 \log(A(w)) \quad (2.13)$$

$$\tau(w) = \frac{-\partial(\varphi(w))}{\partial w} \quad (2.14)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, le filtre idéal est irréalisable en pratique. Nous sommes donc amenés à définir un gabarit et à choisir une fonction de transfert répondant aux critères imposés par ce gabarit. Il existe évidemment un grand nombre de réponses possibles, mais le choix d'une fonction de transfert appropriée résulte d'un compromis entre les nombreuses propriétés listées ci-dessous:

- **Ordre du filtre** : L'ordre du filtre détermine le nombre de composants du filtre, et par conséquent impose des contraintes liées au coût, à la taille, et à la complexité de réalisation. En contre partie de son prix et de son encombrement, un filtre d'ordre élevé offre l'avantage d'une coupure plus raide pour une famille de réponses données.
- **Raideur de coupure** : elle renvoie à la notion de sélectivité définie plus haut.
- **Réponse temporelle** : Le temps de réponse du filtre et le dépassement de la réponse indicielle sont des critères de dimensionnement à ne pas négliger pour certaines applications.
- **Ondulation dans la bande passante (pass-band ripples)** : Un filtre non monotone à l'intérieur

de sa bande passante présente une ondulation. Certains systèmes ne requièrent pas nécessairement une réponse en amplitude monotone, mais imposent une ondulation dans la bande passante limitée à une valeur maximum ( $A_{\max}$ ).

- **Distorsion de phase dans la bande passante** : Dans les applications de filtrage où le signal ne doit pas être déformé quand il est situé dans la bande passante, le déphasage introduit dans la bande passante doit être linéaire en fonction de la fréquence, ou, ce qui est équivalent, le temps de propagation de groupe doit être constant.

$$\mathbf{h}(t) \xrightarrow{\text{TF}} H(f), \text{ donc } \mathbf{h}(t - t_0) \xrightarrow{\text{TF}} H(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0} \quad (3.14)$$

Le spectre est inchangé, mais un déphasage supplémentaire est introduit :  $\varphi_s(f) = -j2\pi f t_0$

Le temps de propagation de groupe  $\tau$  est défini aussi par ( $w=2\pi f$ ) :  $\tau = \frac{-1}{2\pi} \frac{d\varphi_s(f)}{df}$

On voit dans le cas où  $\varphi_s(f)$  est linéaire en fréquence que  $\tau = t_0$

La majorité des familles de réponses sont données sous la forme :

$$A(\Omega) = A_0 \sqrt{1 + |K(j\Omega)|^2} \quad (2.15)$$

Où  $A(\Omega)$  représente l'affaiblissement en fonction de la fréquence et porte le nom de « fonction d'approximation ».

Le terme  $A_0$  est constant.  $K(j\Omega) = \frac{F(j\Omega)}{P(j\Omega)}$  est la fonction caractéristique du filtre.

On distingue deux types de fonctions d'approximations qui aboutissent à deux grandes catégories de filtres:

- Polynomiaux : ( $K(j\Omega)$  est alors un simple polynôme).
- Non polynomiaux ou à zéros de transmission.  $K(j\Omega)$  se présente sous la forme d'une fraction rationnelle.

## 2.6) Passage au prototype Passe-Bas

Les transformations du gabarit ont pour but de ramener tous les gabarits précédemment énoncés à un **passe-bas** appelé prototype, indépendant de la fréquence, et défini par seulement 3 paramètres :  $k$ ,  $A_{\max}$ ,  $A_{\min}$ .

## 2.7) Normalisation de la fréquence

Elle consiste à choisir comme unité de fréquence non pas le hertz, mais une fréquence  $f_n$  associée au gabarit et qui est :

- Pour le passe-bas et le passe-haut :  $f_n = f_p$ ,
- Pour le passe-bande et le coupe-bande :  $f_n = f_0$ .

La valeur normalisée de la fréquence est :  $F = \frac{f}{f_n} = \frac{w}{w_n} = \Omega$

On introduit la variable complexe normalisée :  $P = jF = j \frac{f}{f_n} = j \frac{w}{w_n} = j\Omega$

**Attention :**  $P \neq j2\pi F$

## 2.8) Transformations des filtres

### 2.8.1) Transposition passe-bas /passe-haut

Pour transformer un filtre passe-bas en un filtre passe-haut (et réciproquement), on fait subir à la variable complexe normalisée  $P$  la transformation suivante:  $P \leftrightarrow \frac{1}{P}$ .

Cette transformation s'applique à la fois aux gabarits et aux fonctions de transfert.

- **Transformation du gabarit :**

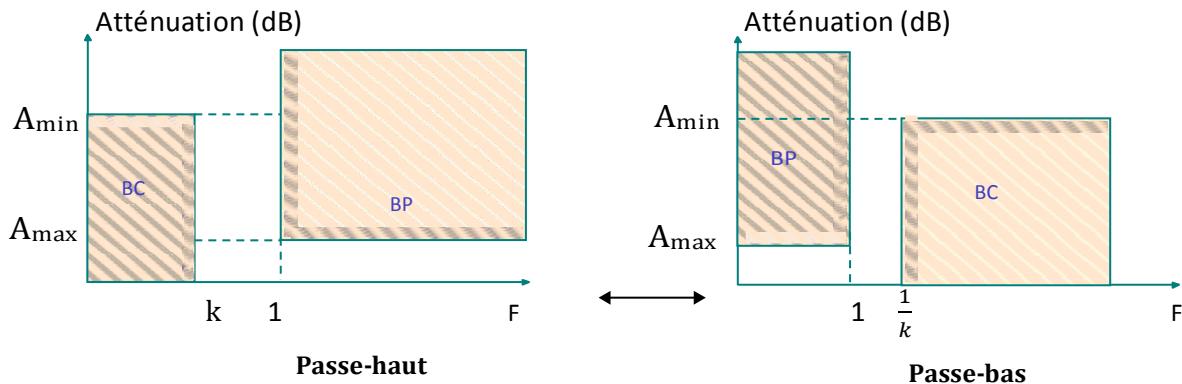


Fig. 2.9 : Transformation du gabarit passe-haut vers un gabarit passe-bas.

- **Transformation de la fonction de transfert :**

$$H_{PH}(p) = H_{PB} \left( \frac{1}{p} \right) \quad (2.16)$$

L'ordre du filtre passe-bas est préservé pour le filtre passe-haut.

### 2.8.2) Transposition passe-bas / passe-bande

On applique la relation de transformation :  $P \Leftrightarrow \frac{1}{B} (P + \frac{1}{P})$ .

Attention, cette transformation impose la symétrie du gabarit !

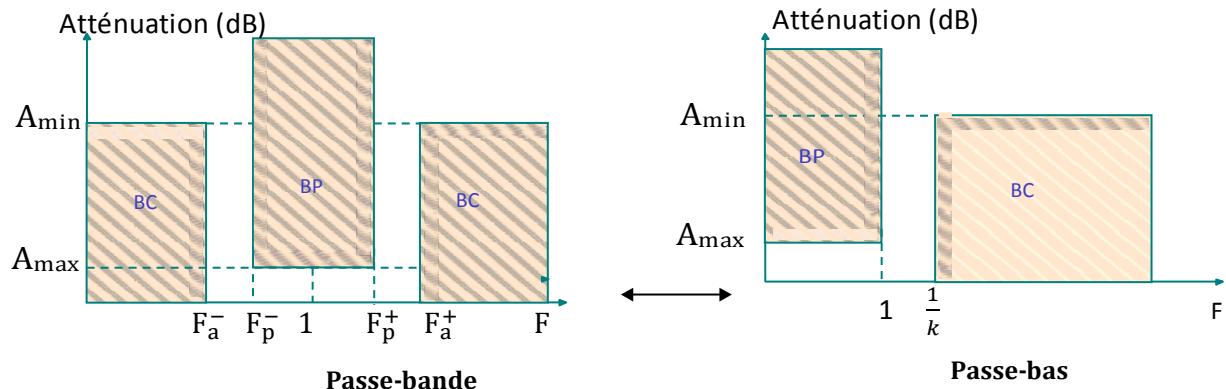


Fig.2.10 : Transformation du gabarit passe-bande vers un gabarit passe-bas

$$B = F_p^+ - F_p^-, \quad F_a = \frac{F_a^+ - F_a^-}{B}, \quad F_p^+ \times F_p^- = F_a^+ \times F_a^- = 1$$

- **Transformation de la fonction de transfert:**

$$H_{p.bande}(P) = H_{p.bas} \left( \frac{P^2 + 1}{B.P} \right) \quad (2.17)$$

L'ordre du filtre passe-bande est doublé par rapport au filtre passe-bas.

### 2.8.3) Transposition passe-bas / coupe-bande

La transformation d'un filtre passe-bas en un filtre coupe-bande est très similaire à celle de la

transformation passe-bas en passe-bande. On fait subir à la variable:  $P \Leftrightarrow \frac{B}{P+1}$

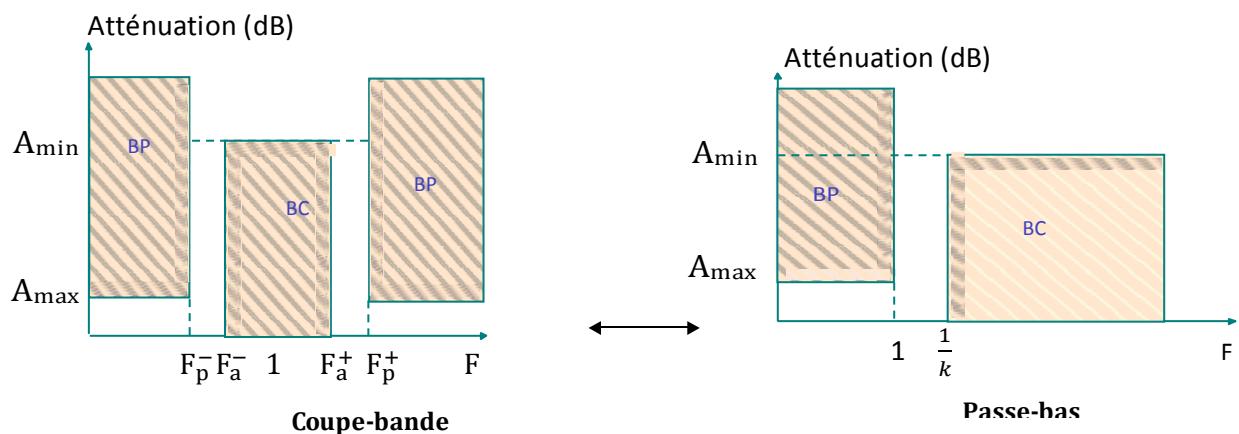


Fig.2.11 : Transformation du gabarit coupe-bande vers un gabarit passe-bas

$$B = F_p^+ - F_p^- , \quad F_a = \frac{B}{F_a^+ - F_a^-} , \quad F_p^+ \times F_p^- = F_a^+ \times F_a^- = 1$$

- **Transformation de la fonction de transfert:**

$$H_{\text{coupe bande}}(P) = H_{\text{passe bas}}\left(\frac{B \cdot P}{P^2 + 1}\right) \quad (2.18)$$

L'ordre du filtre coupe-bande est doublé par rapport au filtre passe-bas.

Tous les cas que nous venons de traiter montrent que l'on peut généralement ramener la réalisation d'un filtre quelconque à celle de son prototype, c'est-à-dire du filtre passe-bas possédant les trois mêmes paramètres fondamentaux:  $A_{\min}$ ,  $A_{\max}$ , et  $k$ . Une fois le schéma du prototype est obtenu, il suffit d'appliquer la transformation inverse aux impédances des composants pour déterminer le schéma du filtre recherché initialement. Cependant, dans le cas des filtres actifs, la transformation inverse des éléments fait apparaître des inductances, composants généralement indésirables. On préfère donc effectuer cette transposition inverse sur la fonction de transfert du prototype. On obtient ainsi la fonction de transfert du filtre recherché dont on effectue directement la synthèse.

## 2.9) Filtres polynomiaux

Le but ici, est de trouver un  $H(p)$  ou  $A(p)$  pour que  $|H(j\omega)|$  ou  $|A(j\omega)|$  satisfassent un gabarit prototype donné. On cherche une fonction rationnelle réalisable sous la forme de l'équation (2.11). Pour des raisons de simplification, on cherche une méthode systématique. On prend  $H(p)$  sous la forme suivante:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2 F(\Omega^2)} \quad (2.19)$$

Ce cas particulier donne des méthodes systématiques simples.

Prenons un cas idéal d'un filtre passe bas donné par :

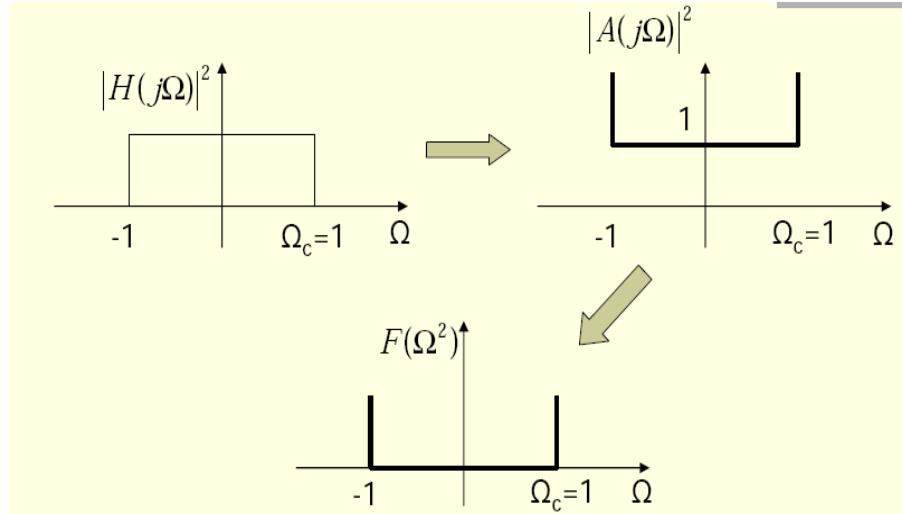


Fig.2.12 : Gabarit d'un filtre idéal passe-bas

Nous allons alors approximer cette fonction.

Dans la bande passante:

$$|H(j\Omega)|^2 = 1 \rightarrow F(\Omega^2) = 0 \quad (2.20)$$

Dans la bande coupée:

$$|H(j\Omega)|^2 = 0 \rightarrow F(\Omega^2) = \infty \quad (2.21)$$

$\epsilon^2$  nous permet de considérer le  $F(\Omega^2)$  dans son état normalisé :  $F(1) = 1$ .

Il permet donc de régler l'atténuation autorisé dans la bande passante.

$$F(1) = 1 \rightarrow H(j1) = \frac{1}{1+\epsilon^2} \quad (2.22)$$

$$F(\Omega^2) = \frac{\text{polynôme d'ordre pair de } \Omega}{\text{polynôme d'ordre pair de } \Omega} \quad (2.23)$$

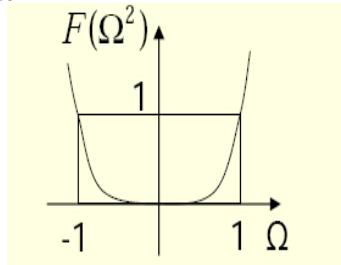


Fig.2.13 : Représentation de F

- Les racines du numérateur (les zéros de F) sont les fréquences sans perte  
→ Ils sont dans la bande passante.
- Les racines du dénominateur sont les zéros de transmission car  $|H(j\Omega)|^2 = 0$   
→ Ils sont dans la bande coupée.
- Pour les filtres passifs  $F(\Omega^2) \geq 0$  car  $|H(j\Omega)|^2 \leq 1$
- Normalisation →  $F(1) = 1$

- Pour un filtre d'ordre  $n$ ,  $F(\Omega^2)$  est d'ordre  $2n$ .

### 2.9.1) Filtre de Butterworth

Ces filtres présentent une réponse en amplitude monotone et pratiquement plate dans la bande passante. Pour cette raison, on les trouve parfois sous la dénomination « *Maximally-flat* » (Fig 2.14). La réponse en amplitude d'un filtre de Butterworth est donnée par :

$$H(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2\Omega^{2n}}} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.24)$$

Ce qui correspond à :

$$A(\Omega) = |H(j\Omega)|^{-1} = \sqrt{1 + \epsilon^2\Omega^{2n}} \Rightarrow |K(j\Omega)|^2 = \epsilon^2\Omega^{2n} \quad (2.25)$$

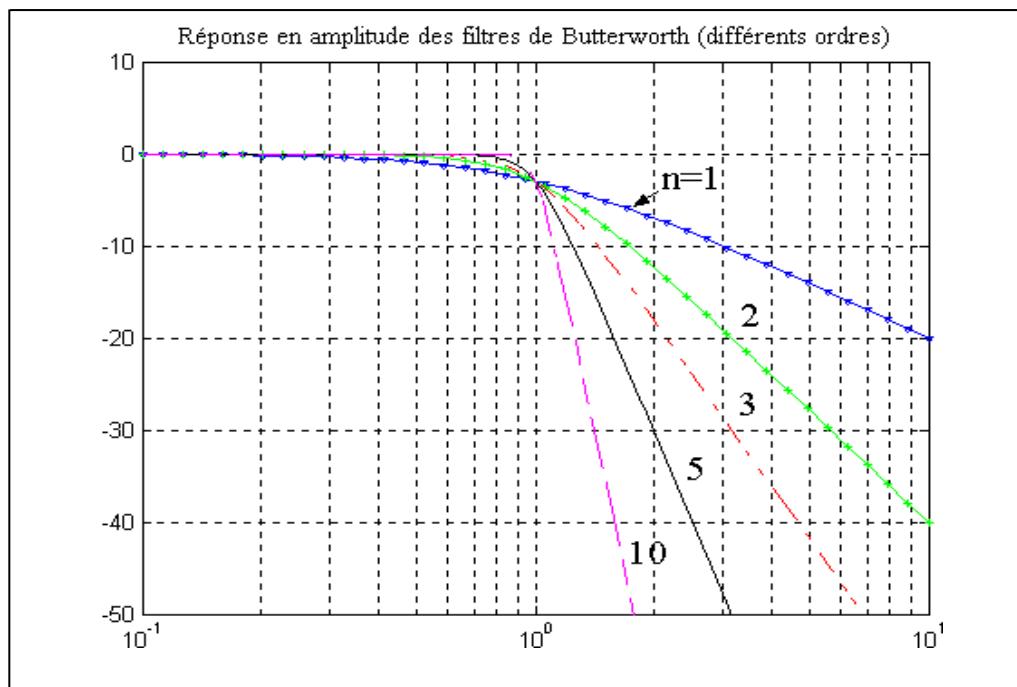


Fig.2.14 : Réponse en amplitude des filtres de Butterworth

- **Détermination de l'ordre du filtre de Butterworth :**

Par calcul, on peut déterminer le facteur  $\epsilon$  et l'ordre  $N$  du filtre à partir des valeurs  $A_{\max}$ ,  $A_{\min}$  et  $\Omega_a$  du prototype passe-bas

$$A_{dB} = A_{\max} = 20 \log \sqrt{1 + \epsilon^2} \quad (2.26)$$

L'affaiblissement maximal  $A_{\max}$  dans la bande passante est atteint lorsque  $\Omega = 1$  :

$$\text{donc : } \epsilon = \sqrt{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1} \quad (2.27)$$

L'affaiblissement maximal  $A_{\min}$  dans la bande passante est atteint lorsque  $\Omega = \Omega_a = 1$  :

$$10 \log(1 + \epsilon^2 \Omega_a^{2n}) = A_{\min}$$

$$\text{donc : } n = \text{entier} \geq \frac{\log\left(10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1\right) - 2\log(\varepsilon)}{2\log(\Omega_a)} \quad (2.28)$$

- **Détermination de la fonction de transfert**

On cherche à trouver la fonction de transfert  $H(p)$  satisfaisant :  $H(j\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\Omega^{2n}}}$

En utilisant la relation  $\Omega = \frac{p}{j}$  on peut écrire :

$$|H(p)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2(-jp)^{2n}} \quad (2.29)$$

On montre que  $|H(p)|^2 = H(p) \cdot H(-p)$ .  $H(p)$  n'a que des pôles à partie réelle négative,  $H(-p)$  n'a que des pôles à partie réelle positive. Chercher les pôles du dénominateur de  $|H(p)|^2$  (autrement dit les racines des polynômes de Butterworth) revient à résoudre l'équation:

$$1 + \varepsilon^2(-jp)^{2n} = 0 \quad (2.30)$$

On en tire :

$$p_k = \sqrt[n]{\frac{1}{\varepsilon}} e^{j\frac{2k+n+1}{2n}\pi} \quad k = 1 \dots 2n-1 \quad (2.31)$$

### 2.9.2) Filtre de Chebyshev1

Dans certaines applications, il n'est pas nécessaire d'avoir une réponse en amplitude très plate dans la bande passante. Dans ce cas, on peut préférer la caractéristique de Chebyshev1, car elle offre une coupure plus raide dans la bande de transition que la caractéristique de Butterworth. Le prix à payer pour cette rapidité de transition est l'apparition d'une ondulation dans la bande passante (Fig 3.9) et un temps de propagation de groupe irrégulier. Cette ondulation est d'amplitude constante dans la bande passante (oscillation de la réponse du filtre entre  $0_{dB}$  et  $A_{\max} = 20\log\sqrt{(1+\varepsilon^2)}$  ), d'où la dénomination «*equiripples*» parfois employée pour ces filtres.

On a la relation :

$$|K(j\Omega)|^2 = \varepsilon^2 C_n^2(\Omega) \quad (2.32)$$

Où  $C_n$  est le polynôme de Chebyshev d'ordre  $n$  défini par :

$$\begin{cases} C_n = \cos[n(\arccos \Omega)] \text{ pour } \Omega \leq 1 \\ C_n = \operatorname{ch}[n(\operatorname{argch} \Omega)] \text{ pour } \Omega \geq 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

Ce qui donne :

$$A(\Omega) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\Omega)} \quad (2.34)$$

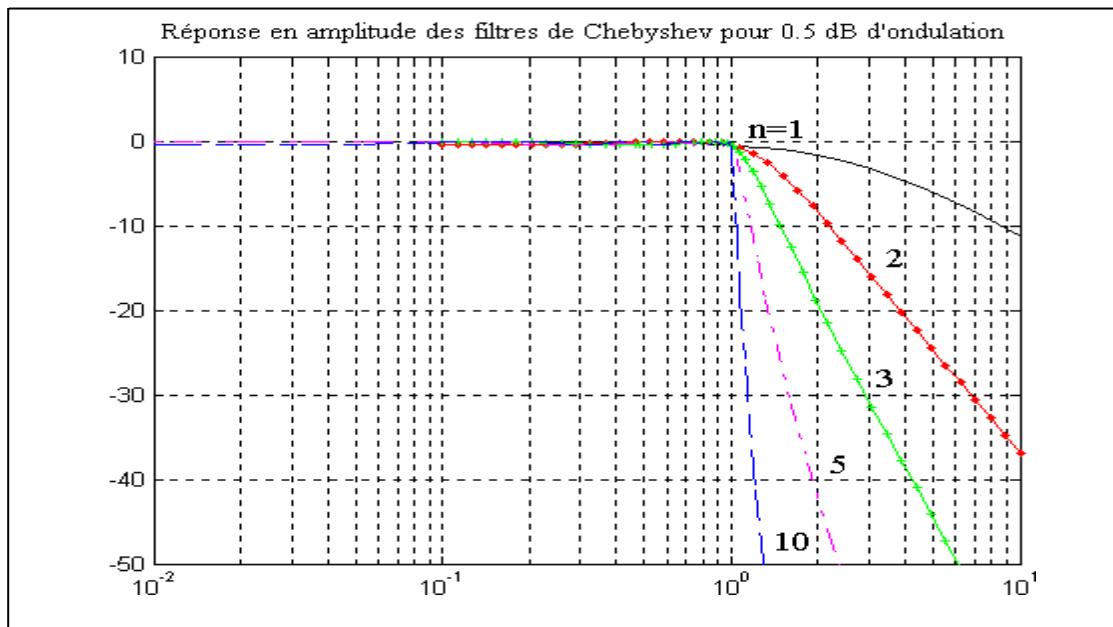


Fig. 2.15 : Réponse en amplitude des filtres de chebychev1

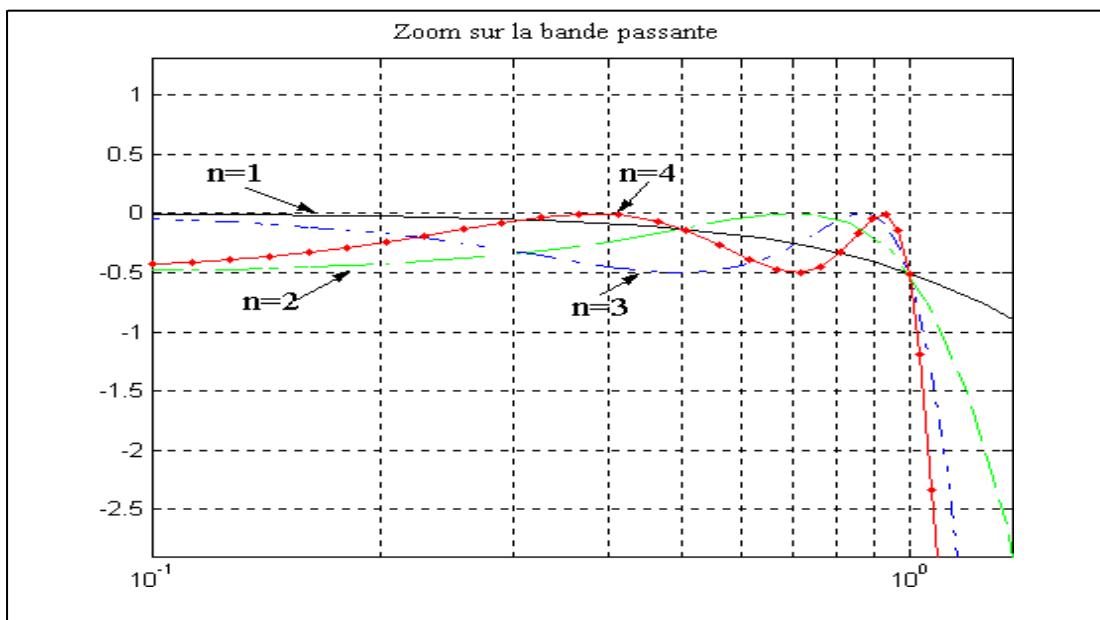


Fig.2.16 : Agrandissement de la réponse(chebychev1)dans la bande passante

- pour  $\Omega < 1$ ,  $C_n^2(\Omega)$  oscille entre 0 et 1 et  $A(\Omega)$  varie entre 1 et  $\sqrt{1 + \epsilon^2}$
- pour  $\Omega > 1$ ,  $C_n^2(\Omega)$  croit jusqu'à l'infini
- pour  $\Omega = 1$ ,  $C_n^2(\Omega) = 1$ ,  $\forall n$

**Remarque :** le polynôme  $C_n(\Omega)$  est défini par une relation de récurrence:

$$C_0(\Omega) = 1, \quad C_1(\Omega) = \Omega, \quad C_{n+1}(\Omega) = 2\Omega \cdot C_n(\Omega) - C_{n-1}(\Omega)$$

Veillez à ne pas confondre le polynôme de Chebyshev avec le dénominateur de la fonction de transfert du filtre.

Il est à noter que lorsque l'ordre est pair, le gain statique est différent de 1. Il est égal à l'ondulation dans la bande passante.

- **Détermination de l'ordre du filtre de Chebyshev1**

On peut déterminer le facteur  $\epsilon$  et l'ordre  $N$  du filtre à partir des valeurs  $A_{\max}$ ,  $A_{\min}$ , et  $\Omega_a$  du prototype passe-bas.

L'affaiblissement maximal  $A_{\max}$  dans la bande passante est atteint lorsque  $\Omega=1$ .

En général, on choisit pour  $A_{\max}$  la valeur maximale de l'ondulation. Dans ce cas, on a:

$$A_{\max} = 10 \log_{10}(1 + \epsilon^2) \quad (2.35)$$

L'affaiblissement minimal déduit :  $A_{\min}$  dans la bande atténuée est atteint lorsque  $\Omega = \Omega_a$ . On en déduit :

$$20 \log(\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\Omega_a)}) \geq A_{\min}(\text{dB})$$

Avec :  $C_n(\Omega) = \text{ch}[n(\text{argch } \Omega)]$  pour  $\Omega \geq 1$ .

Soit :  $\epsilon^2 \text{ch}^2[n(\text{argch } \Omega_a)] \geq 10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1$  avec  $\epsilon^2 = 10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1$

$$\text{Ce qui conduit à : } \text{ch}^2[n(\text{argch } \Omega_a)] \geq \frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}$$

D'où finalement :

$$n \geq \frac{\text{argch} \left( \sqrt{\frac{10^{\frac{A_{\min}}{10}} - 1}{10^{\frac{A_{\max}}{10}} - 1}} \right)}{\text{argch}(\Omega_a)} \quad (2.36)$$

- **Détermination de la fonction de transfert :**

On pourrait déterminer les pôles d'un filtre de Chebyshev1 en résolvant l'équation:

$$1 + \epsilon^2 C_n^2 \left( \frac{p}{j} \right) = 0 \quad (2.37)$$

et en ne conservant que les pôles à partie réelle négative.

### 2.9.3) Filtre de Bessel (ou Thompson)

La caractéristique de Bessel possède une réponse en amplitude dans la bande passante sans ondulation. Parmi les différentes fonctions de réponse existantes, la caractéristique de Bessel présente toujours la coupure la moins raide. Autrement dit, pour un gabarit donné, elle donne l'ordre le plus élevé et aboutit par conséquent à la complexité la plus grande. Les filtres de Bessel présentent

néanmoins l'avantage d'assurer un déphasage linéaire en fonction de la fréquence, donc un temps de propagation de groupe constant. Aussi, la qualité essentielle des filtres de Bessel est de donner la distorsion minimale sur les signaux non sinusoïdaux. La réponse temporelle du filtre à un échelon de tension est une méthode simple pour mesurer ce type de distorsion.

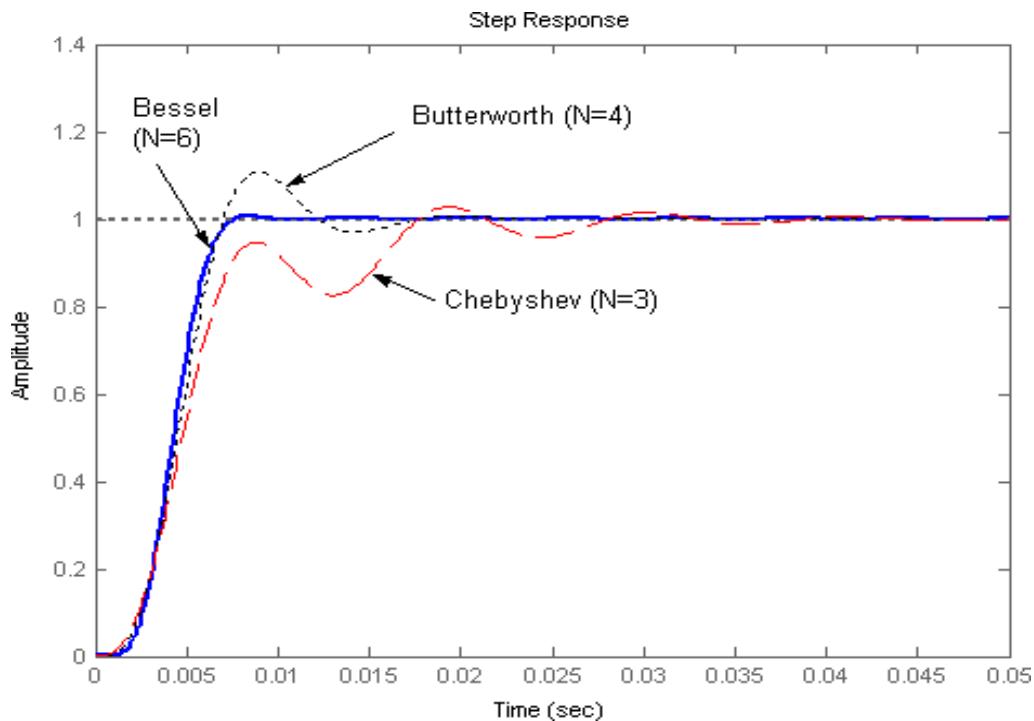


Fig .2.17 : Réponses indicielles comparées pour 3 types de filtres répondant au même gabarit ( $A_{max}=3$ dB,  $A_{min}=40$  dB,  $f_p=100$  Hz,  $f_a=300$  Hz)

- **Détermination de l'ordre du filtre**

L'ordre du filtre est déterminé par des abaques qui donnent les courbes de l'atténuation en fonction de la fréquence pour différents ordres (ces courbes passent par une atténuation de 3 dB à la fréquence de coupure  $f_p$ ).

- **Détermination de la fonction de transfert**

Pour ce type de filtres, on cherche directement la fonction de transfert, sans passer par l'intermédiaire de la fonction caractéristique, puisque l'on s'intéresse au temps de propagation de groupe et non à l'atténuation.

La fonction de transfert d'un filtre ayant un temps de propagation de groupe  $\tau$  parfaitement constant est :

$$F(p) = e^{-\tau p} \quad (2.38)$$

Soit en posant  $\tau p = p$ :

$$F(p) = e^{-p} = \frac{1}{ch(p) + sh(p)} \quad (2.39)$$

Une approximation à l'ordre  $n$  de cette fonction de transfert nous permet d'obtenir une relation du type:  $F(p) = \frac{1}{P_n(p)}$ , où  $P_n(p)$  est le polynôme de Bessel d'ordre  $n$ .

Note : Les polynômes de Bessel sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = p + 1 \\ P_n = (2n - 1)P_{n-1} + P_2 P_{n-2} \end{cases} \quad (2.40)$$

Cette méthode de détermination de la fonction de transfert est peu commode et n'est pas cohérente avec la méthode de calcul des autres filtres.

**Remarque**

Les filtres de Bessel ont été conçus en prenant comme critère le comportement du temps de propagation de groupe. Ainsi, si nous transposons en fréquence un filtre passe-bas, par exemple pour obtenir un filtre passe-bande, les formes des atténuations en fonction de la fréquence seront conservées, mais il n'en sera pas de même du temps de propagation de groupe.

## 2.10) Filtre non polynomiaux

Dans le cas des filtres non polynomiaux, on donne à la fonction caractéristique la forme d'une fraction rationnelle, ce qui permet l'introduction de fréquences d'atténuation infinie ou zéros de transmission.

L'introduction de zéros de transmission peut avoir deux avantages très importants :

- ✓ Supprimer des fréquences particulièrement indésirables, comme par exemple la porteuse dans un filtre de démodulation;
- ✓ Rendre la coupure du filtre beaucoup plus raide en plaçant un zéro de transmission immédiatement après la fréquence de coupure, sans que cela nécessite un ordre élevé.

Le calcul analytique de la fonction de transfert de ces filtres est complexe, on a donc recours à une synthèse à l'aide d'outils informatiques.

### 2.10.1) Filtre elliptiques (ou Decauer)

De tous les filtres possibles, ce sont ceux qui satisfont les exigences d'un gabarit donné avec une fonction de transfert d'ordre  $n$  minimal. Malheureusement, leur temps de propagation de groupe est extrêmement irrégulier, ce qui exclut leur utilisation quand la forme temporelle d'un signal doit être préservée. La courbe d'affaiblissement des filtres de Cauer oscille entre les valeurs extrêmes autorisées par le gabarit, aussi bien en bande passante qu'en bande atténuée.

Pour un filtre d'ordre  $\mathbb{Q}$ , il existe  $\frac{\mathbb{Q}}{2}$  ( $\mathbb{Q}$  est pair) et  $\frac{\mathbb{Q}-1}{2}$  ( $\mathbb{Q}$  est impair) fréquences pour lesquelles l'atténuation est infinie, et autant de fréquences pour lesquelles l'atténuation est nulle (cf. exemple Fig.2.15).

- **Détermination de l'ordre**

- a. *Première méthode* : La fonction **ellipord** de Matlab permet de déterminer l'ordre du filtre à partir du gabarit non normalisé.
- b. *Deuxième méthode* : utilisation des abaques

- **Détermination de la fonction de transfert**

La fonction **ellip** de Matlab nous donne le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert ou

l'utilisation des tables qui sont en général fournies pour différents couples de valeurs de  $A_{\max}$  et  $A_{\min}$ . Elles donnent la fonction de transfert du prototype passe-bas. Il ne reste alors qu'à effectuer la transposition inverse et à dénormaliser.

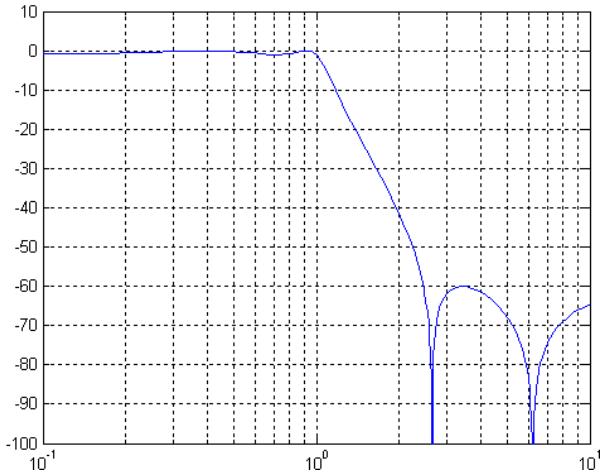


Fig. 2.18a : Courbe de gain d'un filtre elliptique d'ordre 4  
( $A_{\max} = 1 \text{ dB}$ ,  $A_{\min} = 60 \text{ dB}$ ,  $w_n = 1 \text{ rad/s}$ )

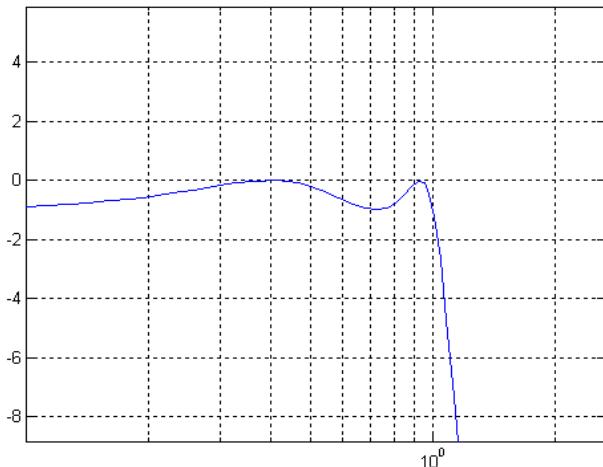


Fig. 2.18b : Zoom sur la bande passante

### 2.10.2)Chebyshev2 (Inverse)

Ces filtres correspondent aux meilleurs compromis entre raideur de coupure et régularité du temps de propagation de groupe en bande passante. De plus, leur courbe d'affaiblissement présente un méplat en bande passante. L'ensemble de ces propriétés les rendent particulièrement intéressants dans les systèmes d'instrumentation.

$$A(\Omega) = \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\Omega}{\omega_n}\right)^{2n}}}$$
 (2.36)

(Expression de  $A(\Omega)$  : voir filtres de Chebyshev1)  $\omega_n$  est une constante d'échelle.

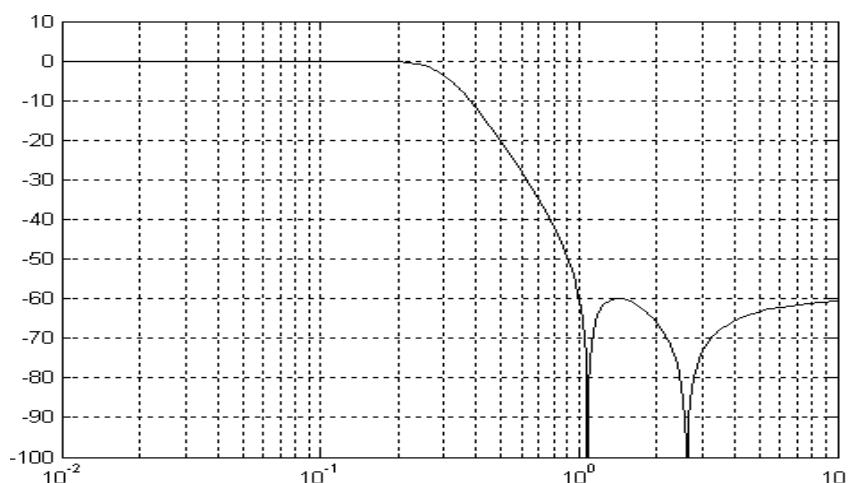


Fig. 2.19 : Courbe de gain d'un filtre de Chebyshev inverse d'ordre 4  
( $w_n = 1 \text{ rad/s}$ ,  $A_{\min} = 60 \text{ dB}$ )

- **Détermination de l'ordre d'un filtre de Chebyshev2**

La fonction **cheb2ord** de Matlab permet de déterminer l'ordre du filtre à partir du gabarit non normalisé

- **Détermination de la fonction de transfert**

La fonction **cheby2** de Matlab nous donne le numérateur et dénominateur de la fonction de transfert. Il faut notamment préciser l'atténuation minimale souhaitée, afin de limiter l'amplitude des ondulations à cette valeur.

La Figure 3.13 met en évidence la déformation du signal pouvant être induite par un filtre elliptique, en raison de ses mauvaises performances en termes de temps de propagation de groupe.

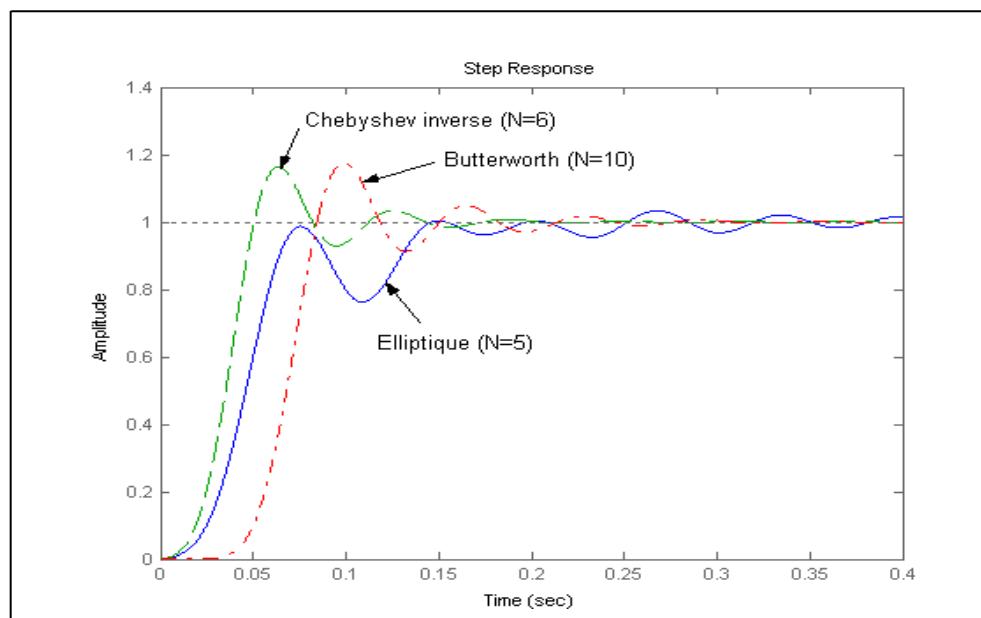


Fig.2.20 : Réponses indicielles comparées pour 3 types de filtres répondant au même gabarit

( $A_{\max}=3\text{dB}$ ,  $A_{\min}=60\text{ dB}$ ,  $w_p=100\text{ Hz}$ ,  $w_a=200\text{ Hz}$ )

## 2.11) Récapitulatif

Le Tableau 2.1 récapitule les caractéristiques des différents filtres.

Tableau 2. 1 : Comparaison des différentes fonctions de réponse

	Type	Bande passante	Bande atténuée	Raideur de coupure (pour n donné)	Régularité du temps de propagation de groupe	Réalisation
Filtres polynomiaux	Butterworth	Plate	Monotone	Moyenne	Bonne	Simple
	Chebyshev1	Ondulée	Monotone	Bonne	Faible	
	Bessel	Plate	Monotone	Faible	La meilleure	
Filtres non polynomiaux	Elliptique	Ondulée	Ondulée	La meilleure	Faible	Complexe
	Chebyshev2	Plate	Ondulée	Bonne	Bonne	

Il est à noter que les filtres polynomiaux donnent lieu à des réalisations simples, car leur fonction de transfert est simple. Le calcul des filtres non polynomiaux est complexe, et nécessite le recours à des moyens informatiques. La réalisation de ces filtres occasionne généralement l'utilisation de topologies plus sophistiquées. A titre d'exemples:

- ✓ L'oreille humaine étant peu sensible à la distorsion de phase, on peut avoir recours à des filtres elliptiques pour des applications audio nécessitant une bonne coupure. Par contre, la distorsion d'amplitude est perceptible, et l'on cherchera à minimiser l'ondulation en bande passante. Les filtres de Butterworth sont souvent utilisés tant que leur ordre restera raisonnable.
- ✓ Lorsque l'on transmet des signaux comportant des fronts (signaux numériques, par exemple), ou un signal vidéo, on recherche une bonne régularité du temps de propagation de groupe. Pour ce type d'applications, on est naturellement amené à choisir un filtre de Bessel. Cependant, pour atteindre la raideur de coupure souhaitée, l'ordre du filtre nécessaire est parfois rédhibitoire. On peut alors recourir à une autre fonction de réponse, en corrigeant la distorsion de phase introduite à l'aide d'un filtre passe-tout (le calcul du passe-tout nécessite un ordinateur).

## EXERCICES

### PROBLEME

Nous voulons concevoir un filtre pour séparer le signal audio du signal ADSL. Supposons que le signal audio est un signal passe bas limité jusqu'à 3200 Hz et que le spectre du signal ADSL commence à partir de 20 kHz. Nous tolérons une atténuation maximale de 1 dB pour le signal audio et souhaitons avoir une atténuation minimale de 50 dB sur le signal ADSL.

A. (Filtre Butterworth)

- Donner le  $H(p)$  du filtre à réaliser
- Calculer  $n$  l'ordre du filtre
- Tracer le gabarit du filtre prototype
- Donner le  $H_p(P)$  du filtre prototype
- Dénormaliser pour obtenir  $H(p)$
- Donner le circuit LC du filtre pour les résistances de source et de charge égale à  $50 \Omega$ .

B. (Filtre Chebyshev1)

- Donner le  $H(p)$  du filtre à réaliser
- Calculer le  $n$
- Tracer le gabarit du filtre prototype
- Donner le  $H_p(P)$  du filtre prototype
- Dénormaliser pour obtenir  $H(p)$
- Donner le circuit LC du filtre pour les résistances de source et de charge égale à  $50 \Omega$ .

### EXERCICE1

Nous souhaitons concevoir un filtre passe-haut de type Butterworth pour atténuer au moins 20 dB les fréquences inférieures à 4 kHz et de ne pas atténuer plus que 1 dB pour les fréquences supérieures à 12 kHz.

- a. Tracer le gabarit
- b. Transformer ce filtre en prototype et donner le gabarit du filtre prototype.
- c. Calculer l'ordre du filtre.
- d. Utilisant le tableau, donner le  $H_p(p)$ .
- e. Dénormaliser pour obtenir  $H(p)$ .

### EXERCICE2

Un filtre passe-bande est à concevoir. On souhaite garder à 1 dB près les composantes fréquentielles (50Hz-80Hz), atténuer au moins 15 dB en dessous de 25 Hz, et au moins 23 dB en dessus de 125 Hz.

- a) Donner le gabarit du filtre.
- b) Donner le gabarit prototype (pour rendre le filtre symétrique, faites bouger le f3.)
- c) Calculer le  $H(P)$  pour ce gabarit prototype en utilisant la méthode Butterworth.
- d) Donner le  $H(p)$  pour le filtre réel.

(dire seulement comment faire, le résultat final n'est pas à calculer)

## Corrections des exercices

### Problème

#### A. Filtre Butterworth :

$$n = 0.5 \frac{\left[ \log \frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1} \right]}{\log \left( \frac{\Omega_a}{\Omega_p} \right)} = 3,5 \Rightarrow \text{on prend } n \text{ entier naturel} = 4.$$

De la table (voir annexe) le résultat suivant est obtenu :

$$A_p(p) = p^4 + 2,613 p^3 + 3,414 p^2 + 2,613 p + 1$$

$$(p) = A_p(p) \text{ avec } p = \frac{p \cdot \varepsilon^{\frac{1}{4}}}{2\pi \cdot 3200} = 4,2 \cdot 10^{-5} p$$

$$\text{où } \varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_{max}} - 1} = 0,509 \Rightarrow \varepsilon \cdot 1/4 = 0,84$$

$$A(p) = (4,2 \cdot 10^{-5})^4 p^4 + 2,613 * (4,2 \cdot 10^{-5})^3 p^3 + 3,414 (4,2 \cdot 10^{-5})^2 p^2 + 2,613 (4,2 \cdot 10^{-5}) p + 1$$

#### B. Filtre de Tchebychev :

$$n = \frac{\arccos \left[ \frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{10^{0.1A_{max}} - 1} \right]}{\arccos \left( \frac{\Omega_a}{\Omega_p} \right)}$$

$$A_{min} = 50, \quad A_{max} = 1, \quad \Omega_p = 1, \quad \Omega_a = \frac{20000}{3200} = 6,25$$

Ce qui donne  $n=2,83 \Rightarrow$  on prend  $n=3$

$$\varepsilon = 1 \text{ dB} \Rightarrow \text{table : } A(p) = 2^{n-1} \varepsilon (p^3 + 0,988p^2 + 1,238p + 0,491)$$

$$H(p) = H_p(p) \text{ où } p = \frac{p}{w_p} = \frac{p}{2\pi \cdot 3200}$$

$$A(p) = 0,25 \cdot 10^{-12} p^3 + 0,5 \cdot 10^{-8} p^2 + 0,125 \cdot 10^{-3} p + 1$$