

Chapitre 6 : Énergie de déformation et élasticité de résistance

1- Énergie de déformation:

Sous l'action de forces extérieures, un corps se déforme d'un état initial à un autre dont le mouvement est exprimé généralement par les composantes du déplacement ou de déformations. Pendant le mouvement les forces extérieures effectuent un certain travail. Si le corps est élastique le travail effectué est totalement transformé en énergie potentielle de déformation, puis qu'après déchargement le corps revient à son état initial.

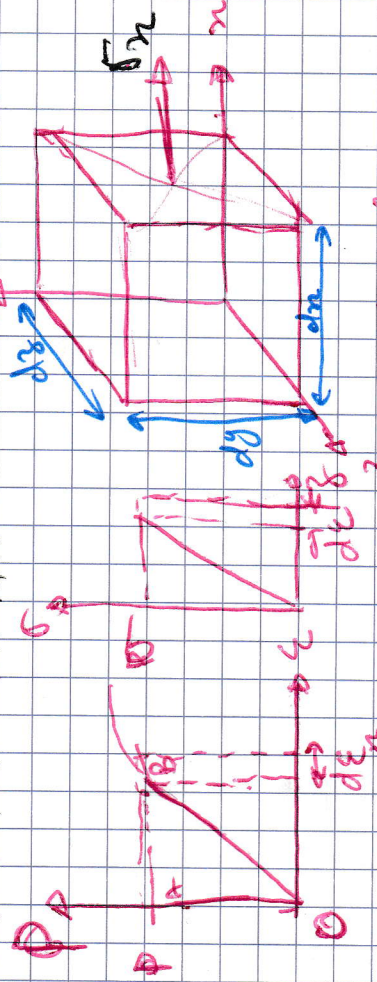


Fig 1. Énergie potentielle d'un corps sous l'action de contraintes d'un chargement

Énergie de déformation par unité de volume d'un élément infinitésimal est donné par: $dU = \frac{1}{V} \int P dS = \int P \frac{d\delta}{dn} = \int \sigma_n d\epsilon_n$

Pour calculer cette énergie de déformation, considérons un élément infinitésimal soumis à une contrainte σ_n et une force correspondante F_n de longueur dx . Dans la déformation, il y a une déformation ϵ_n qui est égale au travail fait par la force F_n sur l'élément.

$$dU = \frac{1}{2} \int \sigma_n d\epsilon_n$$

(ici δ est la déformation, L est la longueur, ϵ_n est égale au travail fait par la force F_n sur l'élément.)

$$dU = dW = \int \sigma_n d\epsilon_n$$

On définit la densité de déformation par unité de volume $U_0 = \frac{dU}{dV} = \int \sigma_n d\epsilon_n$

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \int \sigma_n d\epsilon_n$$

Cas d'une contrainte σ_n constante

$$dU = dW = \int \sigma_n d\epsilon_n = \frac{1}{2} \sigma_n \epsilon_n$$

Cas d'énergie de déformation

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_n \epsilon_n + \sigma_y \epsilon_y + \dots)$$

Pour calculer cette énergie de déformation en fonction de la contrainte, considérons d'abord un petit élément cubique soumis uniquement à l'action de la contrainte normale σ_x . La force correspondante à σ_x produit un allongement ϵ_x de valeur ϵ_x qui est linéairement reliée à σ_x . Dans ce cas le travail effectué pendant cette déformation n'est autre que l'aire du triangle (OAB)

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x (dy dz) \epsilon_x dx = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz$$

(ici bien, l'énergie élastique d'un élément sous l'effet de σ_x est égale au travail fait par la force $\sigma_x dy dz$)

$dU = dW = \int_V \sigma_x d\epsilon_x = d\epsilon_x \int_V \sigma_x dV$
On définit la densité d'énergie de déformation comme l'énergie de déformation par unité de volume.

$$U_0 = \frac{\partial U}{\partial V} = \int_V \sigma_x d\epsilon_x = \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x$$

Cas d'une contrainte de cisaillement τ_{xy} ($E = \frac{\sigma}{\epsilon}$)

$$dU = dW = \int_V \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \int_V \tau_{xy} d\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

Cas d'énergie de déformation:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 6 \tau_{xy} \epsilon_x \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

En termes des contraintes seulement:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

~~En termes~~

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{2} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

~~En termes des déformations seulement~~

$$U_0 = \frac{1}{2} [\epsilon^2]$$

L'énergie de déformation totale:

$$U = \int U_0 dV$$

Application: ν

Une barre de section A de longueur L soumise à un effort axial N . Calculer l'énergie de déformation.

Solution:

la contrainte: $\sigma_x = \frac{N}{A}$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$U_0 = \frac{1}{2E} \sigma_x^2 = \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 \quad (N = \text{const.})$$

$$U = \int_V U_0 dV = U_0 V = \frac{1}{2E} \left(\frac{N}{A} \right)^2 \cdot A \cdot L$$

$$U = \frac{1}{2E} \frac{L}{A} N^2$$

2. Cu

Soit G ,

On admet

simple et

simple.

On admet

une cer

égale à

le domaine

par la

- Etat

- Etat de

2.1. C

le domaine

$G = 40$

donc la

Rankine

Validité:

simple et

2. Critère de résistance.

Soit σ_1, σ_2 et σ_3 les trois contraintes principales en un point M d'un solide. Nous supposons que la limite élastique en traction simple est égale à la limite élastique en compression simple. Soit σ_E cette limite élastique.

On admet que la limite élastique est atteinte lorsque une certaine fonction f des contraintes principales est égale à la limite élastique du matériau en traction simple

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_E$$

Le domaine élastique en un point du solide est donc défini par la relation: $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$

- Etat de traction simple: $\sigma_1 = \sigma_2$ ($\sigma_3 = 0$)

- Etat de cisaillement pur $\sigma_1 = \tau$ ($\sigma_2 = -\tau, \sigma_3 = 0$)

2.1. Critère de Rankine

Le domaine élastique est défini par la relation:

$$\sigma_E = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \leq \sigma_E$$

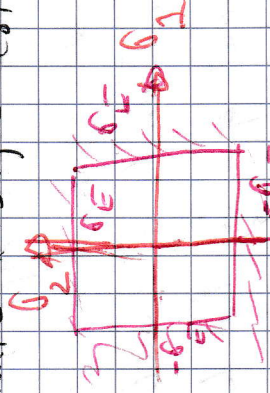
donc la quantité σ_E est appelée contrainte équivalente de Rankine ou des contraintes normale maximale.

Validité: le critère s'écrit: $|\sigma| \leq \sigma_E$ pour un état de traction simple et $|\tau| \leq \sigma_E$ pour un état de cisaillement pur, ce qui

état plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

la contrainte équivalente de Rankine se réduit à :

$\sigma_R = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|)$. Le domaine élastique est représenté sur la figure



Critère de Rankine : domaine élastique

2.2. Critère de Tresca ou

du cisaillement maximal.

le domaine élastique est défini par :

$$\sigma_T = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2 \tau_{\max} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_E$$

la quantité σ_T est appelée contrainte équivalente de Tresca

Validité : le critère s'écrit :

$|\sigma| \leq \sigma_E$ pour un état de tension simple ;

et $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_E$ pour un état de cisaillement pur,

ce qui impose $\tau_E = \sigma_E / 2$.

état plan de contraintes ($\sigma_3 = 0$)

la contrainte équivalente de Tresca se réduit à :

$$\sigma_T = \max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \leq \sigma_E$$

2.3. Critère

le domaine

$$\sigma_{VM} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

la quantité

VM

Validité : le

$$|\sigma| \leq \sigma_E$$

et $|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_E$

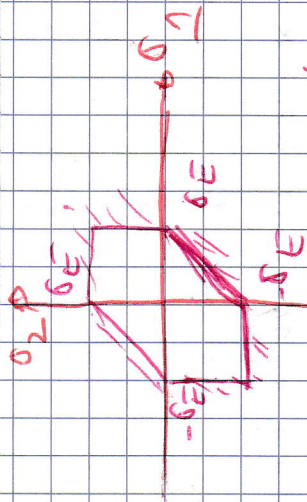
ou pas τ_E

état plan de

la contrainte

$$\sigma_{VM} =$$

et le dom



Critère de Tresca: domaine élastique

2.3 - Critère de Von Mises

Le domaine élastique est défini par la relation

$$\sigma_{VM} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq \sigma_E$$

la quantité σ_{VM} est appelée contrainte équivalente de Von Mises.

Validité: le critère s'écrit:

$$|\sigma| \leq \sigma_E \text{ pour un état de traction simple}$$

et $|\sqrt{3}|z| \leq \sigma_E$ pour un état de cisaillement pur, ce qui

$$\text{donne } \tau_E = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_E = 0,58 \sigma_E$$

Etat plan de contraintes

La contrainte équivalente de Von Mises se réduit à:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

et le domaine élastique est représenté sur la figure:

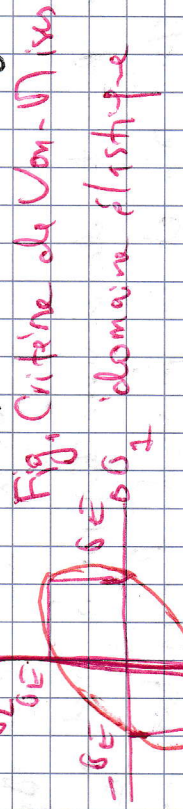


Fig. Critère de Von-Mises

$\sigma_E, \sigma_1, \sigma_2$ domaine élastique

Chapitre 7: Résolution des problèmes d'élasticité linéaire

Elasticité plane et fonction d'Airy

La solution de problème bidimensionnels d'élasticité peuvent se réduire à trouver une fonction de contraintes appelée la fonction d'Airy. Cette méthodologie est introduite dans ce qui suit

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2}, \quad \tau_{12} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)$$

L'équation de def en compatibilité

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2)$$

avec $\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] \quad (3)$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right]$$

et $\epsilon_{12} = \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\tau_{12}}{E}$

Par substitution dans (2) on obtient

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4)$$

Maintenant les équations d'équilibre avec forces volumiques

s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + S_{1x} = 0 & (5) \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + S_{2x} = 0 & (6) \end{cases}$$

en prenant la dérivée (5) par rapport x_2 et (6) par rapport x_1 et en faisant l'addition on obtient

$$\left(\frac{1}{2} \right)$$

En sub $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ (5) une nouvelle

où bien : 74 reste

Exemple :

Donc trouve

que

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_2^2} \right) \right) = \frac{\partial^2 \sigma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

En substituant dans (6) il vient :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad \text{--- (6)}$$

où bien $\nabla^2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0$

Une nouvelle substitution de (1) dans (6) donne :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x_2^4} = 0 \quad \text{--- (7)}$$

$$\text{où bien : } \nabla^4 (\varphi) = 0 \quad \text{--- (8)}$$

Il reste donc à déterminer $\varphi(x_1, x_2)$

Exemple :

Donc si on néglige les efforts de volumes on

$$\text{trouve : } \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$$

$$\text{et } \tau_{12} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{Après qu'on vérifie}$$

$$\text{que } \nabla^4 (\varphi) = 0 \quad \text{--- (9)}$$

par

par

Exemple:

Soit la fonction de contraintes suivante

$$U(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$$

(cas d'une fonction d'ordre 2 polynôme du second degré)

- Dans le cas où $g=0$, on peut écrire

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2A \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 2A \\ \sigma_{12} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -B \end{aligned} \right.$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2A$$

$$\sigma_{12} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -B$$

les vecteurs de contraintes prennent une forme suivant x et y et on évalue dans le

plan (x, y)

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} 2A & -B & 0 \\ -B & 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

2D

$$\begin{bmatrix} \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow 2A \\ \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow -B \right. \\ \left. \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow \leftarrow 0 \right. \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ x \end{matrix}$$