

Série de TD n°02

Exercice 01 :

1. Soit le réseau (circuit) 2-ports de la figure 01:

- Que représente chacune des grandeurs a_1 , b_1 , a_2 et b_2 ?
- Donner le système d'équations qui relie (b_1, b_2) à (a_1, a_2) . (Système de la matrice S)
- Que représente chacun des paramètres S_{ij} , et comment peut-on les obtenir à partir de ce système?

2. Montrer que pour un 2-ports sans pertes et réciproque on a : $|S_{11}| = |S_{22}|$ et $S_{11}^* \cdot S_{21} + S_{21}^* \cdot S_{22} = 0$.

3. Montrer que sur l'accès k d'un n-ports on a:

$$a_k = \frac{V_{ik}}{\sqrt{Z_0}} = \frac{V_k + Z_0 I_k}{2\sqrt{Z_0}} \quad \text{et} \quad b_k = \frac{V_{rk}}{\sqrt{Z_0}} = \frac{V_k - Z_0 I_k}{2\sqrt{Z_0}} \quad \text{avec : } V_k = V_{ik} + V_{rk} = \sqrt{Z_0} (I_{ik} - I_{rk})$$

Exercice 02 :

Donner la matrice [S] de chacun des n-ports suivants : 1. Déphaseur parfait ; 2. Atténuateur parfait ; 3. Isolateur parfait ; 4. Coupleur 3dB parfait 5. Circulateur parfait.

Exercice 03 :

Soit le circuit 2-ports de la figure 02, sa matrice est donnée par : $[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$

1. On a effectué les mesures ci-dessous en réalisant la condition d'adaptation en entrée et en sortie.

La 1^{ère} mesure (figure 02.a) donne : $a_1 = 1 \angle 45^\circ$ et $b_1 = 0.04 \angle 10^\circ$ $b_2 = 0.95 \angle 90^\circ$

La 2^{ème} mesure (figure 02.b) donne : $a_2 = 1 \angle 45^\circ$ et $b_1 = 0.001 \angle 45^\circ$ $b_2 = 0.02 \angle 45^\circ$

Déterminer les éléments de la matrice [S] de ce 2-ports.

2. Quel est le type de ce 2-ports? Quelle est sa fonction? Est-il réciproque ? justifie ta réponse.

3. On connecte une charge Z_L à la sortie de ce 2-ports. Montrer que le coefficient de réflexion à son entrée vaut :

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} \cdot S_{21} \cdot \Gamma_L}{1 - S_{22} \cdot \Gamma_L}$$

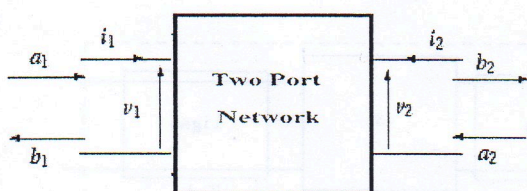


Figure 01

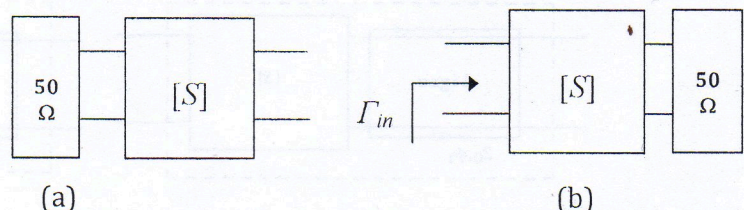


Figure 02

Exercice 04 :

Soit un 2-ports défini par sa matrice $[S] = \begin{bmatrix} 0.8 \angle -120^\circ & 0.1 \angle 150^\circ \\ 4.0 \angle -160^\circ & 0.8 \angle 150^\circ \end{bmatrix}$

1. Ce 2-ports est-il réciproque ? Sans pertes ? Adapté ? Justifie ta réponse.
2. On charge ce 2-ports par une impédance Z_L . Montrer que le coefficient de réflexion à la charge s'écrit :

$$\Gamma_L = \frac{\Gamma_{in} - S_{11}}{S_{22}\Gamma_{in} - \Delta}$$

3. Calculer Γ_L si le coefficient de réflexion à l'entrée du 2-ports est $\Gamma_{in} = 0.46 \angle -100^\circ$.

Exercice 05 :

Soit un 2-ports symétrique, réciproque et sans pertes. Le coefficient de réflexion mesuré à l'entrée est $\Gamma_{in} = 0.5j$ lorsque la charge ne réfléchit aucune énergie (charge adaptée $\Gamma_L = 0$).

1. Déterminer la matrice $[S]$ du 2-ports.
2. Que vaut Γ_{in} si $\Gamma_L = -1$ (court-circuit) ?

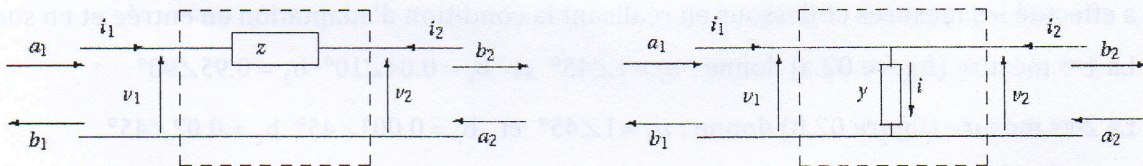
Exercice 06 :

Montrer que la matrice $[S]$ d'un 2-ports réciproque sans pertes s'écrit :

$$[S] = \begin{bmatrix} |S_{11}| e^{j\varphi_{11}} & \pm j \sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{j(\varphi_{11} + \varphi_{22})/2} \\ \pm j \sqrt{1 - |S_{11}|^2} e^{j(\varphi_{11} + \varphi_{22})/2} & |S_{11}| e^{j\varphi_{22}} \end{bmatrix}$$

Exercice 07 :

Donner la matrice de réparation des circuits suivants:


Exercice 08 :

Un circuit 2-ports a une matrice de répartition $[S]$ est placé à l'extrémité d'un tronçon de ligne sans pertes de longueur l . Trouver la matrice de réparation de l'ensemble ligne+2-ports (figure 4.a).

Déduisez la matrice de réparation du circuit de la figure 4.b.

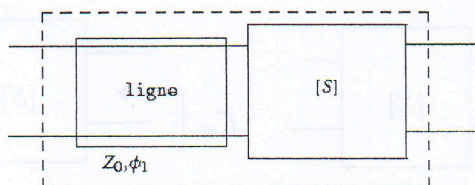


Figure 4.a

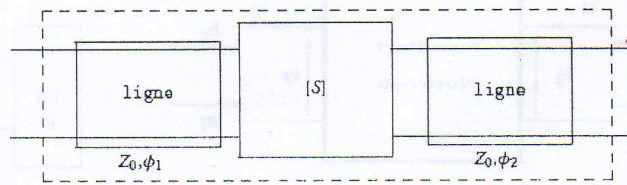


Figure 4.b

TD n°02-Exo 4

on a: $S_{11} = 0,8 \angle -120^\circ$

$$S_{12} = 0,1 \angle 150^\circ$$

$$S_{21} = 4 \angle -160^\circ$$

$$S_{22} = 0,8 \angle 150^\circ$$

1) on a: $S_{12} \neq S_{21}$ donc le 2-ports n'est pas réciproque.

$|S_{21}| = 4 > 1$ donc le 2-ports a un gain et il est sans pertes.

$S_{11} \neq 0$ et $S_{22} \neq 0$ le 2-ports est désadapté en entrée et en sortie.

2) on a montré dans l'exercice 03 que le coefficient de réflexion à l'entrée du 2-ports est exprimé par :

$$\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L}$$

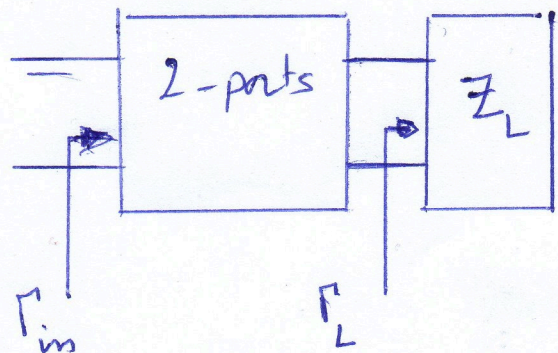
$$\Leftrightarrow (\Gamma_{in} - S_{11})(1 - S_{22} \Gamma_L) = S_{12} S_{21} \Gamma_L$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{in} - S_{11} - S_{22} \Gamma_{in} \Gamma_L + S_{11} S_{22} \Gamma_L = S_{12} S_{21} \Gamma_L$$
$$= S_{12} S_{21} \Gamma_L$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_L [(S_{12} S_{21} - S_{11} S_{22}) + S_{22} \Gamma_{in}] = \Gamma_{in} - S_{11}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Gamma_L = \frac{\Gamma_{in} - S_{11}}{S_{22} \Gamma_{in} + \Delta}}$$

$$\text{avec } \Delta = S_{12} S_{21} - S_{11} S_{22}$$



3) AN: $\Gamma_{in} = 0,46 \angle -100^\circ \Rightarrow \Gamma_L = 0,88 \angle 90,44^\circ$

TD n°02 - Ex05

on a: 2-ports réciproque $\Leftrightarrow S_{12} = S_{21}$ (1)

2-ports symétrique $\Leftrightarrow S_{11} = S_{22}$ (2)

2-port sans pertes $\Leftrightarrow {}^t[S^*][S] = [I]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 & (3.a) \\ S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} = 0 & (3.b) \\ S_{21}^* S_{11} + S_{22}^* S_{12} = 0 & (3.c) \\ |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 & (3.d) \end{cases}$$

on a aussi:

$\Gamma_{in} = 0,5j$ si la charge est adaptée au 2-ports $\Rightarrow \Gamma_L = 0$

Donc: $\Gamma_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} 0}{1 - 0 S_{22}} = S_{11} = 0,5j$

* l'eq (2) donne: $S_{11} = S_{22} = 0,5j = 0,5 e^{j\pi/2}$

* l'eq (3.a) $\Leftrightarrow |S_{12}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2} = \sqrt{1 - (0,5)^2}$

$$\Rightarrow |S_{12}| = |S_{21}| = 0,86$$

* l'eq (3.b) et (3.c) donnent: $S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} = 0$

$$\Leftrightarrow |S_{11}| |S_{12}| (e^{j(\varphi_{11} - \varphi_{12})} + e^{-j(\varphi_{11} - \varphi_{12})}) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{j(\varphi_{11} - \varphi_{12})} + e^{-j(\varphi_{11} - \varphi_{12})} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(\varphi_{11} - \varphi_{12}) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi_{11} = \varphi_{12} \pm (2n+1)\pi/2$$

Pour $n=0$ $\varphi_{12} = \varphi_{11} = \pi/2 = 0$

$$\Rightarrow [S] = \begin{bmatrix} 0,5 e^{j\pi/2} & 0,86 \\ 0,86 & 0,5 e^{j\pi/2} \end{bmatrix}$$

on prend $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 0$

EXO 5 (Suite)

$$2/ \quad \Gamma_L = -1 \quad \Rightarrow \quad Z_L = 0 \quad \text{Court circuit}$$

$$\text{on rappel} \quad \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_c}{Z_L + Z_c}$$

$$\text{Donc : } \Gamma_L = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} \Gamma_L}{1 - S_{22} \Gamma_L} = S_{11} - \frac{S_{12} S_{21}}{1 + S_{22}}$$

$$AN \approx \Gamma_m(\Gamma_L = -1) = -0,6 + 0,8j = 0,99 \angle 126,63^\circ$$

reciproque et sans pertes: $[S]^* [S] = [I]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1 & (1) \\ S_{11}^* S_{12} + S_{12}^* S_{22} = 0 & (2) \\ S_{21}^* S_{11} + S_{22}^* S_{12} = 0 & (3) \\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

$$(1)-(4) \Rightarrow |S_{11}| = |S_{22}| \quad \varphi_{12} = \varphi_{21}$$

$$(1) \Leftrightarrow |S_{12}| = |S_{21}| = \sqrt{1 - |S_{11}|^2} \quad (\text{réciprocité})$$

$$(2) \Leftrightarrow |S_{11}| |S_{12}| e^{-j\varphi_{11}} e^{+j\varphi_{12}} + |S_{12}| |S_{22}| e^{-j\varphi_{12}} e^{+j\varphi_{22}} = 0$$

$$\Leftrightarrow |S_{11}| |S_{12}| \left(e^{+j(\varphi_{12} - \varphi_{11})} + e^{-j(\varphi_{12} + \varphi_{22})} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(e^{+j(\varphi_{12} - \varphi_{11})} + e^{-j(\varphi_{12} - \varphi_{22})} \right) = 0 \quad (5)}$$

$$(3) \Leftrightarrow |S_{12}| |S_{11}| e^{-j\varphi_{21}} e^{+j\varphi_{11}} + |S_{22}| |S_{12}| e^{-j\varphi_{22}} e^{+j\varphi_{12}} = 0$$

$$\Leftrightarrow |S_{12}| |S_{11}| \left(e^{-j(\varphi_{21} - \varphi_{11})} + e^{+j(\varphi_{12} - \varphi_{22})} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(e^{-j(\varphi_{12} - \varphi_{11})} + e^{+j(\varphi_{12} - \varphi_{22})} \right) = 0 \quad (6)}$$

$$(5) + (6) \Leftrightarrow 2 \cos(\varphi_{12} - \varphi_{11}) + 2 \cos(\varphi_{12} - \varphi_{22}) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_{12} - \varphi_{11}) = -\cos(\varphi_{12} - \varphi_{22}) \quad (7)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cos \alpha + \underbrace{\sin \pi}_0 \sin \alpha$$

on a: $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$$\cos(-\pi - \alpha) = -\cos \alpha = \cos(\pi + \alpha)$$

Donc :

$$(F) \Leftrightarrow \pi - (\varphi_{12} - \varphi_{11}) = (\varphi_{12} - \varphi_{22})$$

$$\Leftrightarrow 2\varphi_{12} = \pi + (\varphi_{11} + \varphi_{22})$$

$$\Leftrightarrow \varphi_{12} = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\varphi_{11} + \varphi_{22}}{2} \right)$$

et $e^{j\pi/2} = +j$ $e^{-j\pi/2} = -j$

En outre $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$

ne donne pas de solution logique !



TD n°3 / Exo 7

1) Matrice $[S]$ d'une impédance série

Les lois de Kirchhoff donnent

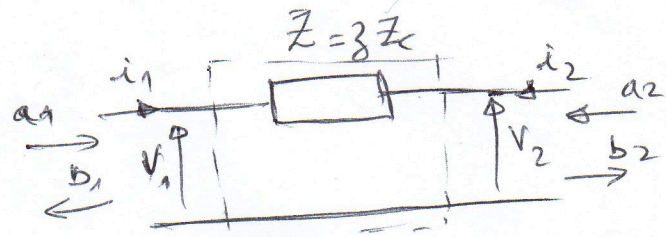
$$I_1 = -I_2 \quad (1)$$

$$V_1 - Z I_1 = V_2 \quad (2)$$

on a aussi

$$V = \sqrt{Z_c} (a + b) = Z_c (I_i + I_r) \quad \left. \begin{array}{l} a = \sqrt{Z_c} I_i \\ b = \sqrt{Z_c} I_r \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = \frac{V + Z_c I}{2\sqrt{Z_c}} \\ b = \frac{V - Z_c I}{2\sqrt{Z_c}} \end{array}$$

$$I = \frac{(a - b)}{\sqrt{Z_c}} = (I_i - I_r)$$



$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{Z_c} (a_1 + b_1) - \frac{Z}{\sqrt{Z_c}} (a_1 - b_1) = \sqrt{Z_c} (a_2 + b_2)$$

$$\Leftrightarrow (a_1 + b_1) - \frac{Z}{Z_c} (a_1 - b_1) = (a_2 + b_2)$$

$$\Leftrightarrow b_1 \left(1 + \frac{Z}{Z_c}\right) - b_2 = \left(\frac{Z}{Z_c} - 1\right) a_1 + a_2 \quad (3)$$

d'autre part

$$(1) \Leftrightarrow a_1 - b_1 = b_2 - a_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_2 = a_1 - b_1 + a_2 \quad (4) \\ b_1 = a_1 - b_2 + a_2 \quad (5) \end{cases}$$

on remplace (4) dans (3):

$$b_1 \left(1 + \frac{Z}{Z_c}\right) - a_1 + b_1 - a_2 = \left(\frac{Z}{Z_c} - 1\right) a_1 + a_2$$

$$\Leftrightarrow b_1 \left(2 + \frac{Z}{Z_c}\right) = \frac{Z}{Z_c} a_1 + 2a_2$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{Z}{Z + 2Z_c} a_1 + \frac{2Z_c}{Z + 2Z_c} a_2} \quad (6)$$

on remplace (5) dans (3)

$$-b_2 + \left(1 + \frac{Z}{Z_c}\right) a_1 - \left(1 + \frac{Z}{Z_c}\right) b_2 + \left(1 + \frac{Z}{Z_c}\right) a_2 = \left(\frac{Z}{Z_c} - 1\right) a_1 + a_2$$



$$\Leftrightarrow \left(2 + \frac{Z}{Z_c}\right) b_2 = 2a_1 + \frac{Z}{Z_c} a_2$$

$$\Leftrightarrow b_2 = \frac{2}{2 + Z/Z_c} a_1 + \frac{Z/Z_c}{2 + Z/Z_c} a_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b_2 = \frac{2Z_c}{2Z_c + Z} a_1 + \frac{Z}{2Z_c + Z} a_2} \quad (7)$$

(6) et (7) donnent la matrice $[S]$ du 2-port "impédance série".

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{Z + 2Z_c} & \frac{2Z_c}{Z + 2Z_c} \\ \frac{2Z_c}{Z + 2Z_c} & \frac{Z}{Z + 2Z_c} \end{bmatrix}$$

on remarque que $S_{11} = S_{22}$ (symétrique) et $S_{21} = S_{12}$ (réciproque)

En normalisant par Z_c , on obtient :

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{Z + 2} & \frac{2}{Z + 2} \\ \frac{2}{Z + 2} & \frac{Z}{Z + 2} \end{bmatrix}$$

* le 2-port "impédance parallèle" a une matrice $[S]$

normalisée donnée par :

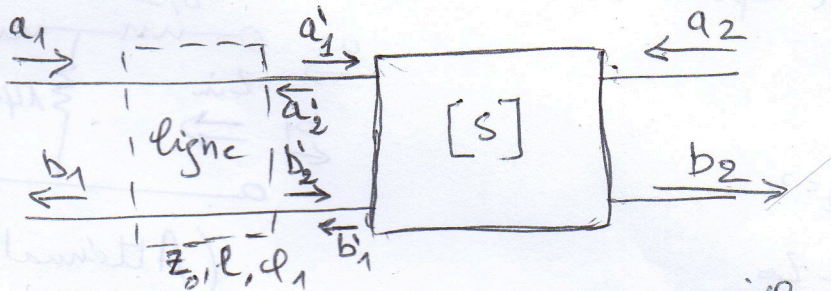
$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{-Y}{Y + 2} & \frac{2}{Y + 2} \\ \frac{2}{Y + 2} & \frac{-Y}{Y + 2} \end{bmatrix}$$

EX08

La matrice $[S]$ d'une ligne sans pertes est:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & \exp(-j\varphi) \\ \exp(-j\varphi) & 0 \end{bmatrix}$$

ou $\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda}$ avec l : longueur physique du tronçon.



on a :

$$\begin{cases} a_1' = b_2' & (1) \\ a_2' = b_1' & (2) \end{cases} \quad \text{pour la ligne} \quad \begin{cases} b_1 = e^{-j\varphi_1} a_2' & (3) \\ b_2 = e^{-j\varphi_1} a_1' & (4) \end{cases}$$

pour le 2 port

$$\begin{cases} b_1' = S_{11} a_1' + S_{12} a_2' & (5) \\ b_2 = S_{21} a_1' + S_{22} a_2' & (6) \end{cases}$$

(1) et (4) donnent: $a_1' = e^{-j\varphi_1} a_1$ (7)

(2) et (3) donnent: $b_1 = e^{-j\varphi_1} b_1' \Rightarrow b_1' = e^{j\varphi_1} b_1$ (8)

on remplace (7) et (8) dans (5) et (6), il vient:

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} e^{-j2\varphi_1} a_1 + S_{12} e^{-j\varphi_1} a_2 \\ b_2 = S_{21} e^{-j\varphi_1} a_1 + S_{22} a_2 \end{cases}$$

d'où

$$\Rightarrow [S] = \begin{bmatrix} S_{11} e^{-j2\varphi_1} & S_{12} e^{-j\varphi_1} \\ S_{21} e^{-j\varphi_1} & S_{22} \end{bmatrix}$$

Pour le circuit de la figure 4.b, on obtient :

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} e^{-2j\varphi_1} & S_{22} e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ S_{21} e^{-j(\varphi_1 + \varphi_2)} & S_{22} e^{-2j\varphi_2} \end{bmatrix}$$

Exo sup

Exercice 04 (réponse)

$$* S_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

$$\text{Si } Z_L = Z_0 \Rightarrow S_{11} = \frac{Z_{in}^{(1)} - Z_0}{Z_{in}^{(1)} + Z_0}$$

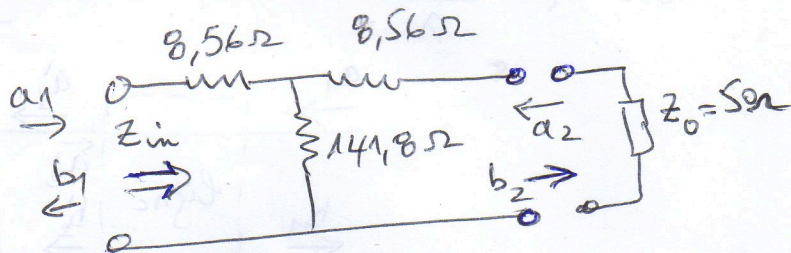
$$* \text{ on montre que } Z_{in}^{(1)} = 50 \Omega \Rightarrow S_{11} = 0$$

à cause de la symétrie du circuit $S_{22} = 0$

$$* S_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

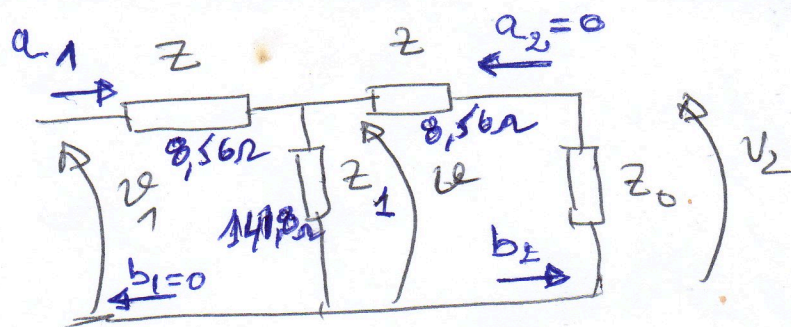
on montre que $S_{21} = S_{12} = 0,707$ (-3 dB)

$$\text{Soit } [S] = \begin{bmatrix} 0 & 0,707 \\ 0,707 & 0 \end{bmatrix}$$



Exo 1 (cas général)

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1} \Big|_{a_2=0} = \frac{V_2}{V_1}$$



$$\text{on a } V_1 = \sqrt{Z_0} (a_1 + b_1) = \sqrt{Z_0} a_1 \quad (b_1=0 \quad S_{22}=0)$$

$$V_2 = \sqrt{Z_0} (a_2 + b_2) = \sqrt{Z_0} b_2$$

$$\text{on a: } \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0}{Z_0 + Z} \quad (1)$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{[(Z + Z_0) \parallel Z_1]}{[(Z + Z_0) \parallel Z_1] + Z} \quad (2)$$

$$(2) \times (1) \Leftrightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0 * [(Z + Z_0) \parallel Z_1]}{(Z_0 + Z) ([(Z + Z_0) \parallel Z_1] + Z)}$$

$$= \frac{Z_0 * \frac{(Z + Z_0) Z_1}{Z + Z_0 + Z_1}}{(Z + Z_0) \left[\frac{(Z + Z_0) Z_1}{Z + Z_0 + Z_1} + Z \right]}$$

$$\Rightarrow S_{21} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_0 Z_1 (Z + Z_0)}{(Z + Z_0)^2 Z_1 + Z (Z + Z_0) (Z + Z_0 + Z_1)}$$