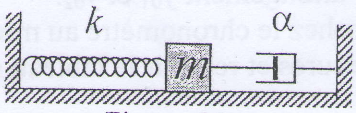
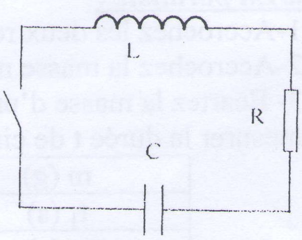
TP02 OSCILLATIONS LIBRES ET FORCEES DES SYSTEMES A UN DEGRE DE LIBERTE

Objectifs :

1/Observer les différents régimes d'oscillation,
Mesure de la résistance critique,
Déterminer le décrément logarithmique et le facteur de qualité en régime pseudo périodique.
2/Etude du régime permanent :
-Résonance en amplitude
-Résonance en puissance

Etude théorique :

1/ OSCILLATIONS LIBRES: Dans cette étude nous allons considérer en parallèle un système mécanique et un système électrique à un degré de liberté libre et amorti.

Oscillateur mécanique	Oscillateur électrique
 Figure 01	 Figure 02
On déplace la masse m et on lâche le système. L'équation différentielle du mouvement s'écrit ; $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k x=0$ (1)	On charge le condensateur avec une tension, $V_c = \frac{q}{c}$ puis on ferme l'interrupteur, L'équation de variation de la charge s'écrit : ……………………… (a)
La forme générale de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti est : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (2)	La forme générale de l'équation différentielle de l'oscillateur est : ……………………… (b)
$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ facteur (coefficient) d'amortissement	…………… coefficient d'amortissement
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre de l'oscillateur	…………… pulsation propre de l'oscillateur.

De manière générale la résolution de l'équation (2) s'effectue en cherchant des solutions de la forme : $x(t) = Ae^{st}P_n(t)$ (3)

Où $P_n(t)$ est un polynôme de degré n, en remplacent (3) dans (2) on obtient l'équation caractéristique de (2) qui s'écrit : $s^2 + 2\lambda S + \omega_0^2 = 0$ (4)
La résolution de (4) donne les valeurs de s selon les valeurs du discriminant réduit $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$
On distingue trois cas possibles :

1/ Amortissement fort ($\lambda > \omega_0$), régime apériodique :

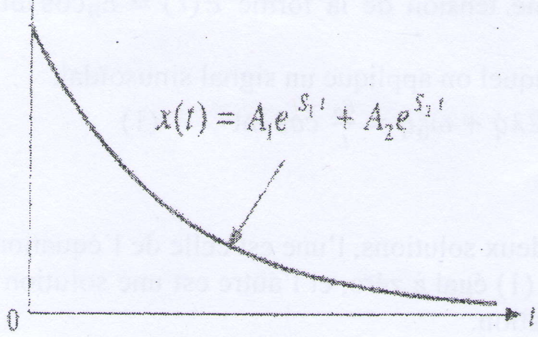
Dans ce cas l'équation (4) admet deux racines réelles $s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

La solution générale de l'équation (2) s'écrit : $x(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$
s_1 et s_2 étant négatives, x(t) est la somme de deux exponentielles décroissantes.

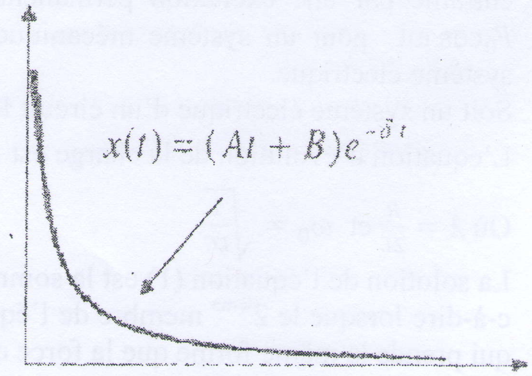
2/ Amortissement critique ($\lambda = \omega_0$), régime critique:

Dans ce cas l'équation (4) admet une racine double $s_1 = s_2 = -\lambda$
La solution générale de l'équation (2) s'écrit : $x(t) = (At + B)e^{-st}$

Dans le régime critique le système retourne à sa position d'équilibre sans aucune oscillation.



Régime apériodique ou fortement amorti



Régime critique

3/Amortissement faible ($\lambda \langle \omega_0$), régime pseudopériodique :

Dans ce cas l'équation (4) admet deux racines complexes $s_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

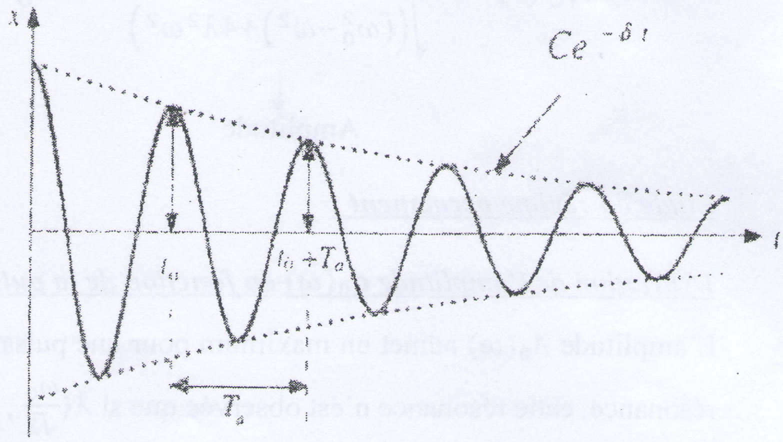
La solution générale de l'équation (2) s'écrit : $x(t) = \left(Ae^{i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} + Be^{-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\right)e^{-\lambda t}$

Ce terme $\left(Ae^{i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} + Be^{-i\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}}\right)$ dans cette dernière équation peut s'écrire sous la forme sinusoïdale $C\cos(\omega_a t + \varphi)$ alors la solution devient : $x(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

Dont : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est la pseudo-pulsation, et $T_a = \frac{2\pi}{\omega_a}$ est la pseudo-période.

On remarque très bien que l'amplitude décroit exponentiellement avec le temps.

Le rapport $D = \frac{1}{n} ln \frac{x(t)}{x(t+nT_a)} = ln \frac{x(t)}{x(t+T_a)}$ définit le décrément logarithmique pour ce régime. Le degré d'amortissement peut être défini par une autre grandeur qu'on appelle : Facteur de qualité $Q = \frac{\omega_a}{2\lambda}$.



Régime oscillatoire amorti ou pseudopériodique

2/ OSCILLATIONS FORCEES: Les oscillations d'un système sont dites forcées si le système est entrainé par une excitation permanente et harmonique, qui est une force de la forme $F(t) = F_0 \cos \omega t$ pour un système mécanique ou une tension de la forme $E(t) = E_0 \cos \omega t$ pour un système électrique.
Soit un système électrique d'un circuit RLC auquel on applique un signal sinusoïdal.
L'équation d'évolution de la charge est : $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$ (1)

Où $\lambda = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$.
La solution de l'équation (1) est la somme de deux solutions, l'une est celle de l'équation homogène c-à-dire lorsque le 2ième membre de l'équation (1) égal à zéro, et l'autre est une solution particulière qui prends la même forme que la force d'excitation.
La solution générale s'écrit alors : $q(t) = q_H(t) + q_p(t)$

Solution homogène
Régime transitoire

Solution particulière
Régime permanent

$$q_H(t) = \left\{ \begin{array}{ll} A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad avec\, s_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} & pour\ \lambda \rangle \omega_0 \\ Ce^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \varphi) \quad avec \quad \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} & pour\ \lambda \langle \omega_0 \\ (At + B)e^{-\lambda t} & pour\ \lambda = \omega_0 \end{array} \right.$$

$$q_P(t) = q_0(\omega) e^{i(\omega t + \Phi)}$$

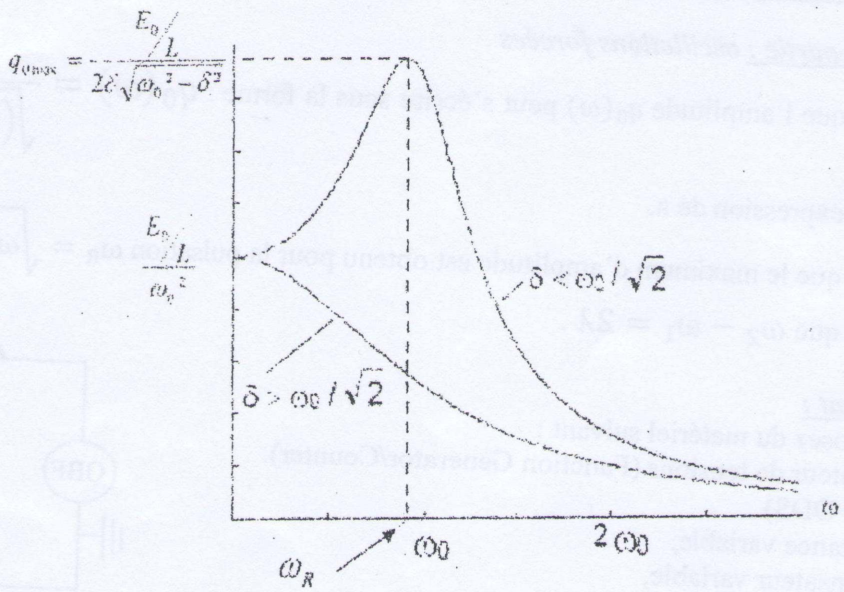
Avec : $$\underbrace{q_0(t) = \frac{\frac{E_0}{L}}{\sqrt{\left((\omega_0^2 - \omega^2) + 4\lambda^2\omega^2\right)}}}_{\text{Amplitude}} \quad \text{et} \quad \underbrace{tg\Phi = -\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}_{\text{Déphasage}}$$

Etude du régime permanent :

1/variation de l'amplitude $q_0(\omega)$ en fonction de la pulsation ω :

L'amplitude $A_0(\omega)$ admet un maximum pour une pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ appelée pulsation de résonance, cette résonance n'est observée que si $\lambda \langle \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$,

Pour les amortissements forts $\lambda \rangle \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ on n'observe pas de résonance.



résonance d'amplitude pour $\delta\langle \omega_0/\sqrt{2}$

4/Bande passante et facteur de qualité :

a-La bande passante d'un circuit résonant (c'est-à-dire pour lequel on peut observer une résonance), peut être déterminée à partir de la courbe d'amplitude, elle correspond à la gamme de pulsations pours lesquelles $q_0 \geqslant \frac{q_{0max}}{\sqrt{2}}$, elle est notée : $B = \omega_2 - \omega_1$

b-Le facteur de qualité d'un système oscillant est défini par le rapport : $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$

$\omega_2 et \omega_1$ sont les pulsations pour les quelles l'amplitude $q_0 \geqslant \frac{q_{0max}}{\sqrt{2}}$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{B}$$

Travail avant la manipulation :

Première partie: oscillations libres

Considérez le système électrique de la figure 02.

1-Donnez l'expression de la différence de potentiel (ddp) aux bornes de chaque élément du circuit en fonction de la charge q du condensateur.

2-Donnez l'équation différentielle de variation de la charge dans le circuit et la mettre sous la forme $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$.

3-Identifiez λ et ω_0 en fonction de R, L, C.

4-Montrez que le décrément logarithmique peut s'écrire sous la forme $D = \lambda.\, T_a$

5-Montrez que pour les faibles amortissements ($\lambda \langle\langle \omega_0$) le facteur de qualité du circuit sera réduit à $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Deuxièmes partie : oscillations forcées

1-Montrez que l'amplitude $q_0(\omega)$ peut s'écrire sous la forme : $q_0(\omega) = \frac{a\omega_0^2}{\sqrt{((\omega_0^2-\omega^2)+4\lambda^2\omega^2)}}$

, donnez l'expression de a.

2-Montrez que le maximum d'amplitude est obtenu pour la pulsation $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$.

3-Montrez que $\omega_2 - \omega_1 = 2\lambda$.

Equipement :

Vous disposez du matériel suivant :
-un générateur de tensions (Function Generator/Counter).
(SG 2110 DDS).
-une résistance variable,
-un condensateur variable,
-une bobine variable,
-un oscilloscope à double voie, (Digital Storage Oscilloscope)
-des câbles de connexion.

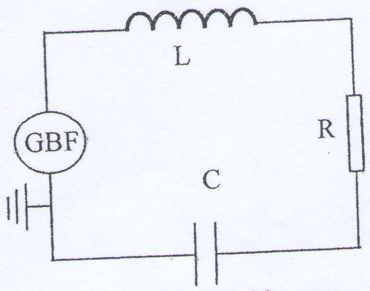


Figure 03

Etude expérimentale :

Première partie: oscillations libres

1-Réalisez le montage de la figure ci-dessus, prendre R=200 Ω, C=10nF et L= 35mH.
2-Alimentez le circuit par un signal **carré** de fréquence **1kHz** (choisir le bouton frequency: wave square, entrer la valeur ensuite ok) et d'amplitude **e=0.7V** (choisir le bouton Ampl, entrer la valeur ensuite ok), appuyer sur output.
3-Observez la tension aux bornes du condensateur sur le canal CH1(X) de l'oscilloscope, en faisant varier la valeur de R observez les différents régimes vus dans la partie théorique.
4-Pour le régime critique, donnez la valeur de la résistance critique R_c dans une plage de 100 Ω.
5- A partir de R_c calculez la valeur de l'inductance L du circuit avec son incertitude.
6- Reprendre la valeur R=200 Ω, à partir du signal observé à l'oscilloscope déterminez le décrément logarithmique D et la pseudo-période T_a du signal amorti.
7-En déduire le facteur de qualité du circuit.

Deuxièmes partie : oscillations forcées *(on garde le même montage, prendre R=200 Ω, C=10nF et L= 35mH)*

1-Alimentez le circuit par un signal **sinusoïdal** de fréquence **10kHz** (choisir le bouton frequency: wave Sinus, entrer la valeur ensuite ok) et d'amplitude **e=0.7V** (choisir le bouton Ampl, entrer la valeur ensuite ok), appuyer sur output.
2-Observez sur CH1(X) de l'oscilloscope la tension aux bornes du condensateur $V_c(t)$ et sur CH2(Y) la tension e(t) du générateur.
3-Mettre l'oscilloscope sur le mode dual (allumer Ch1 et Ch2), ce mode vous permettrez de voir simultanément les deux signaux e(t) et $V_c(t)$, faites varier la fréquence du signal (à l'aide du bouton rond) et observez ce qui se passe pour les deux signaux.
4-Relevez la pulsation de résonance ω_R à partir du signal V_c et la comparer à la pulsation propreω_0.
5-Tracez le graphe $V_c = f(\boldsymbol{\omega})$ pour R=200 Ω et en déduire la bande passante pour chaque courbe.

TP03 OSCILLATIONS LIBRES ET FORCEES D'UN PENDULE DE POHL

Objectifs :

Etude des oscillations libres et forcées d'un système mécanique.

Mesure de l'amplitude en fonction du temps pour différentes valeurs de la force d'amortissement dans les deux cas libre et forcé.

Déterminer le décrément logarithmique et le facteur d'amortissement graphiquement.

Etude théorique :

Lorsqu'on écarte le pendule de sa position d'équilibre puis on le lâche sans vitesse initiale, le système se met en mouvement oscillatoire autour de sa position d'équilibre sous l'effet des vibrations de torsion autour de l'axe (Δ).

L'équation du mouvement est déterminée par l'application du principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{M}(\vec{F})_{/\Delta} = J\ddot{\theta}\,\vec{k}$ (1) où $\sum \vec{M}(\vec{F})_{/\Delta} = -C\theta$,

C étant la constante de torsion et θ la position par rapport à l'équilibre, et J le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

L'équation (1) se met donc sous la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ qui est l'équation d'un oscillateur libre non amorti dont la solution est $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. θ_0 et φ sont déterminés à partir des conditions initiales, la pulsation propre et la période de cet oscillateur sont : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$ (2) ;

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$ (3)

En réalité le système est amorti, si non les oscillations dureraient indéfiniment, l'équation de mouvement devient $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ dont la solution est $\theta(t) = \theta_m e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$

Equipement :

Vous disposez du matériel suivant :

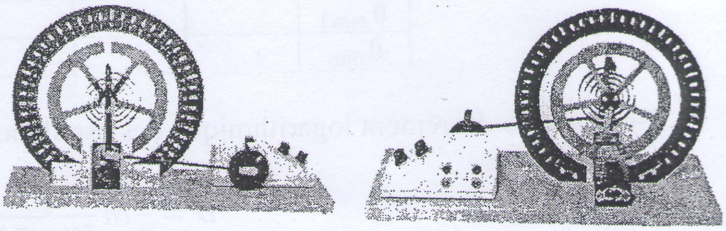
-un pendule de torsion équipé d'un moteur électrique (de fréquence 0.5Hz).

-une bobine, qui joue le rôle de la force d'amortissement.

-source d'alimentation.

-voltmètre.

-chronomètre.



Etude expérimentale :

a/oscillations libre non amorti :

1-appliquez une torsion d'angle θ_0 et déclenchez le chronomètre au moment du lâcher pour mesurer la durée t de cinq oscillations, faire trois mesures pour chaque angle initial appliqué et remplir le tableau suivant :

T(s) durée de 5pérides	$\theta_0 = 18°$	$\theta_0 = 15°$	$\theta_0 = 12°$
t_1(s)			
t_2(s)			
t_3(s)			
T_0(s) durée d'une oscillation			

2-donnez la période propre des oscillations T_0 pour chaque cas d'angle initial (on néglige les amortissements), cette période dépend-t-elle de l'angle initial ?

3-donnez au pendule un angle initial $\theta_0 = 18°$, lâchez le système et lire sur le cadrant gradué les amplitudes maximales de chacune des cinq premières oscillations, faites les mesures trois fois et remplir le tableau suivant :

t(s)	0	T	2T	3T	4T	5T
θ_{max1}						
θ_{max2}						
θ_{max3}						
θ_{moy}						

4-Que remarquez-vous ? Conclure.

b/ oscillations libre amorti :

1-les amortissements sont plus évidents lorsque on alimente la bobine avec un courant d'intensité I = 0.4A, donnez au pendule un angle initial $\theta_0 = 18°$, et déclenchez le chronomètre au moment du lâcher pour mesurer la durée t de cinq oscillations, faire trois mesures et remplir le tableau suivant :

T(s) durée de 5pérides	$\theta_0 = 18°$
$t_1(s)$	
$t_2(s)$	
$t_3(s)$	
$t_{moy}(s)$	

2-on veut à présent estimer les amortissements, donnez au pendule un angle initial $\theta_0 = 18°$, lâchez le système et lire sur le cadrant gradué les amplitudes maximales de chacune des cinq premières oscillations, faites les mesures trois fois et remplir le tableau suivant :

t(s)	0	T_a	$2T_a$	$3T_a$	$4T_a$	$5T_a$
θ_{max1}						
θ_{max2}						
θ_{max3}						
θ_{moy}						

3-calculez le décrément logarithmique des oscillations amorties dont l'expression est :

$$D = \frac{1}{n} ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+nT_a)} = ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+T_a)}$$

4-calculez la valeur de la pseudo-période T_a ainsi que son incertitude absolue et relative.

5-déduire la valeur du facteur d'amortissement λ.

c/oscillations forcées :

1-on veut trouver la relation entre la tension et la fréquence du moteur, mesurer la durée t de cinq tours du moteur et déduire la période et la fréquence du moteur.

Nombre de tours	La durée t(s)	T(s)	f(Hz)
5			

Complétez le tableau suivant :

V(Volt)	6	7	8	9	10	11	12
f(Hz)							

2- on fixe la tension appliquée sur 7V.
Le pendule est en mouvement, mesurez l'amplitude après un certain nombre d'oscillations.

Nombre d'oscillation	5	10	15	20
t	5T	10 T	15 T	20 T
A				

-que remarquez-vous (A=f(t)) ? Quelle est la nature du mouvement du pendule.
-calculez la fréquence du pendule et la comparé avec celle du moteur.

3-variez la tension appliquée, donnez au pendule un angle initial $\theta_0 = 18°$, lâchez le système, mesurez la période et l'amplitude après une minute (après que le mouvement devient périodique). Complétez le tableau suivant :

V(Volt)	6	7	8	9	10	11	12
T(s)							
f(Hz)							
θ							

-tracez le graphe $\theta = g(f)$ avec :$f = \frac{1}{T}$.
-calculez la largeur Δf et en déduire le facteur de qualité Q.
-déduire la fréquence de résonance.