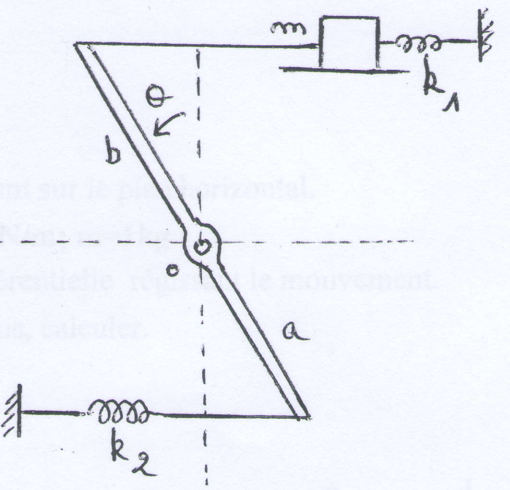
Université de Jijel
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'électronique

Année universitaire 2020/2021
2ieme Année
Matière : Vibration et Ondes

Série de TD N°2

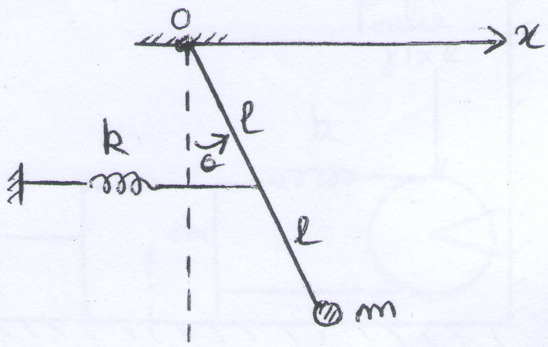
I) Systèmes linéaires libres à un degré de liberté.

Exercice N°1 :



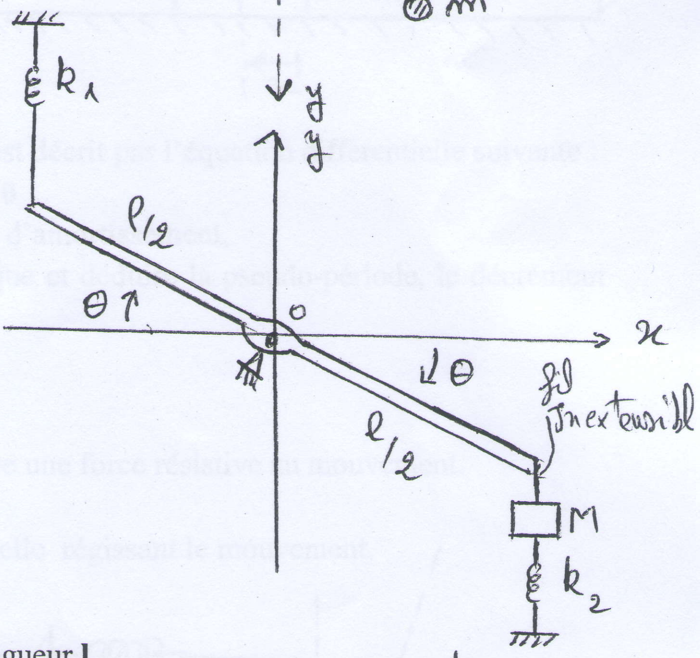
Utiliser la méthode de Newton et Lagrange
pour déterminer l'équation différentielle
régissant le mouvement des petites oscillations.
A l'équilibre, $\theta = 0$ et les ressorts ne sont pas déformés.

Exercice N°2 :



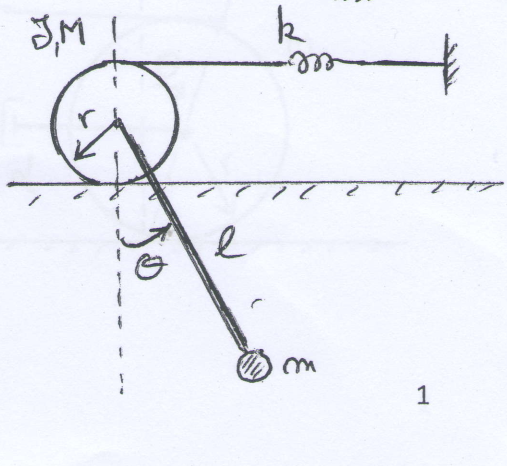
Déterminer par la méthode de Newton et Lagrange
l'équation différentielle régissant le mouvement
des petites oscillations du système ci-contre.
La barre de longueur **2l** est de masse négligeable.
A l'équilibre, la barre est verticale et le ressort n'est pas déformé.

Exercice N°3 :



Soit système de la figure ci-contre ou la barre ,
de moment d'inertie **J**, peut pivoter autour de l'axe **oz**.
1/ Donner la condition d'équilibre θ_0
2/ Utiliser la méthode de Newton pour déterminer
l'équation différentielle régissant le mouvement
des petites oscillations

Exercice N°4 :



On soude au centre d'un cylindre ($J=Mr^2/2$) un bras de longueur **l**,
de masse négligeable et portant une masse **m**.
Le cylindre peut rouler sans glisser sur le plan horizontal.
Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer
l'équation différentielle régissant le mouvement des petites oscillations.
A l'équilibre, $\theta = 0$ et le ressort n'est pas déformé.

C.ZIGHA

Université de Jijel
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'électronique

Année universitaire 2020/2021
2ieme Année
Matière : Vibration et Ondes

II) Systèmes linéaires libres amortis à un degré de liberté.

Exercice N°5 :

Soit système de la figure ci-dessous, ou la masse glisser sans frottement sur le plan horizontal.

A l'équilibre, **x = 0** et le ressort n'est pas déformé. On donne : **k = 1N/m; m=1kg.**

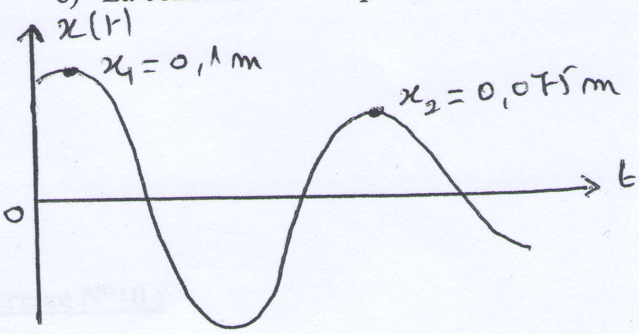
1/ Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement.

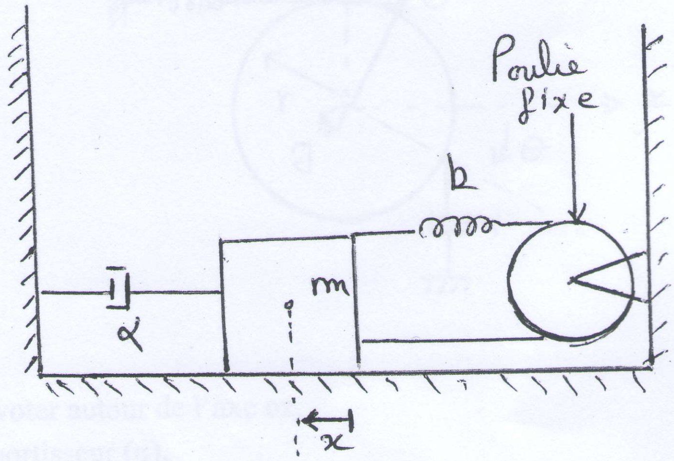
2/ Si le déplacement **x** de la masse est donné par la courbe ci-dessous, calculer.

a) Le coefficient de frottement **α** de l'amortisseur.

b) La pseudo-période du mouvement.

c) La constante de temps **τ**.





Exercice N°6 :

Un mouvement oscillatoire libre amorti de coordonnées q est décrit par l'équation différentielle suivante :

$$q + q + 3q = 0$$

1/ Calculer la pulsation propre du système et la constante d'amortissement,

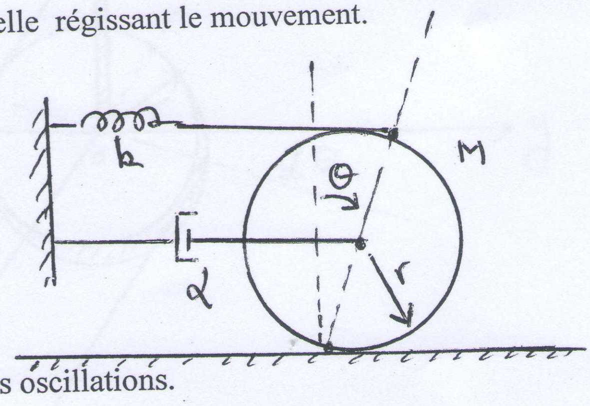
2/ Vérifier qu'il s'agit d'un mouvement pseudo-périodique et déduire la pseudo-période, le décrément logarithmique et la constante de temps.

Exercice N°7

Un pendule simple oscille dans un fluide (air) qui développe une force résistive au mouvement.
Si cette force est inversement proportionnelle à la vitesse.
Déterminer par la méthode de Newton l'équation différentielle régissant le mouvement.

Exercice N°8 :

Un disque de masse **M** et de rayon **r** peut rouler sans glisser sur un plan horizontal schéma ci-contre.
Son moment d'inertie par rapport à l'axe passant par son contre est **J=Mr²/2.**
Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement des petites oscillations.
A l'équilibre, **θ = 0** et le ressort n'est pas déformé.



C.ZIGHA

Université de Jijel
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'électronique

Année universitaire 2020/2021
2^{ieme} Année
Matière : Vibration et Ondes

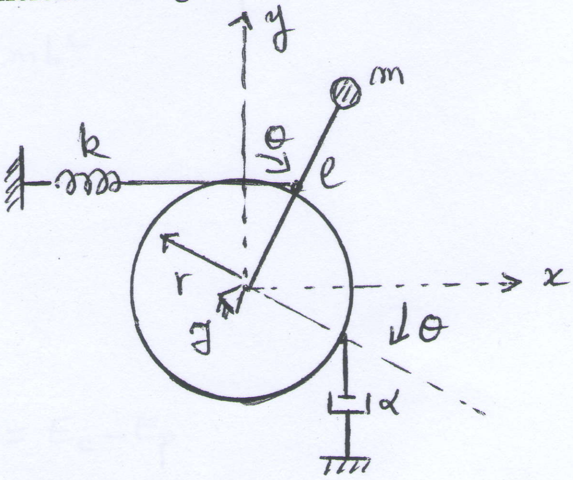
Exercice N°9 :

Soit système de la figure ci-dessous.

1/ Donner la condition d'équilibre θ_0

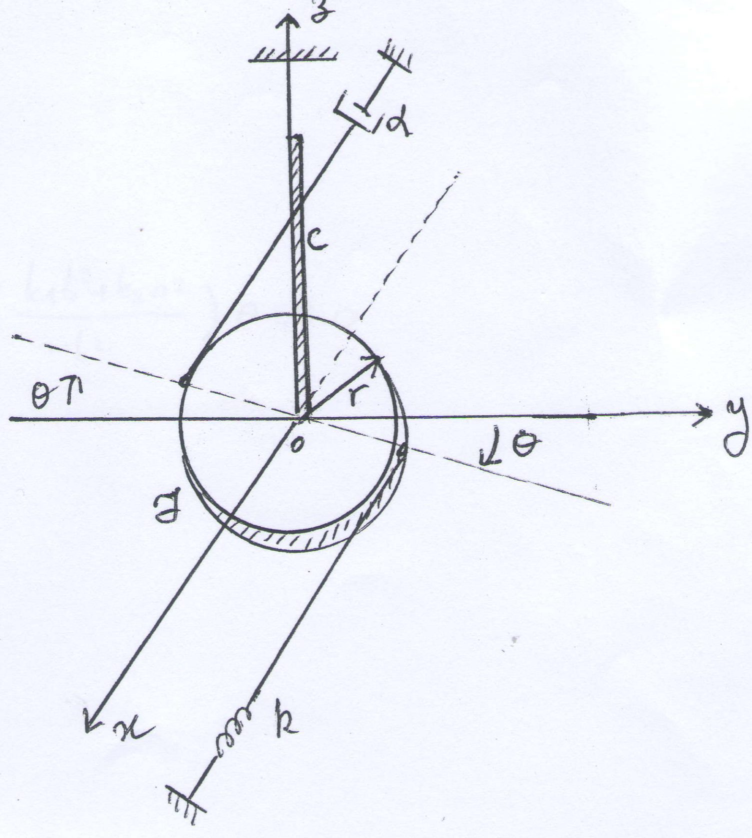
2/ Utiliser la méthode de Newton pour déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement des petites oscillations.

3/ Retrouver le résultat par la méthode de Lagrange



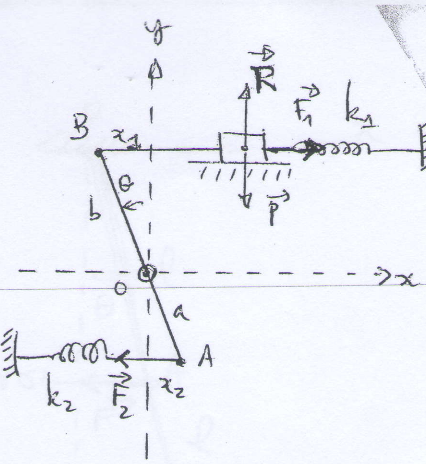
Exercice N°10 :

Un disque de moment d'inertie **J** et de rayon **r** peut pivoter autour de l'axe **oz**.
Il est relié à un fil de torsion **(c)**, un ressort **(k)** et un amortisseur **(α)**.
Le ressort **(k)** et l'amortisseur **(α)** travaillent dans le plan **xoy**.
A l'équilibre, $\theta = 0$ et le ressort et le fil de torsion ne sont pas déformés.
Utiliser la méthode de Newton range pour déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement des petites oscillations.



C.ZIGHA

ton : $\sum \vec{\mathcal{M}}_{/O\vec{z}} = J\ddot{\theta}\vec{k}$



$\mathcal{M}(\vec R)$ et $\mathcal{M}(\vec P)$ ne participent pas au m^{vt} $\Rightarrow$

$$\vec{OA} \wedge \vec{F_2} + \vec{OB} \wedge \vec{F_1} = J\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} a\sin\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -k_2 x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b\sin\theta \\ b\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} k_1 x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = J\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$-a\cos\theta\, k_2 x_2 - b\cos\theta\, k_1 x_1 = J\ddot{\theta} \quad / \quad J = mb^2$$

Petites oscillations : $\begin{cases} x_1 = b\sin\theta \simeq b\theta \\ x_2 = a\sin\theta \simeq a\theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1 b^2 + k_2 a^2}{mb^2}\right)\theta = 0$$

* <u>Lagrange</u> : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ avec $L = E_c - E_p$

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 \; ; \; E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 = \frac{1}{2}(k_1 b^2 + k_2 a^2)\theta^2 .$$

$$\rightarrow L = \frac{1}{2} m b^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1 b^2 + k_2 a^2)\theta^2 .$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mb^2\dot{\theta} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = mb^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -(k_1 b^2 + k_2 a^2)\theta$$

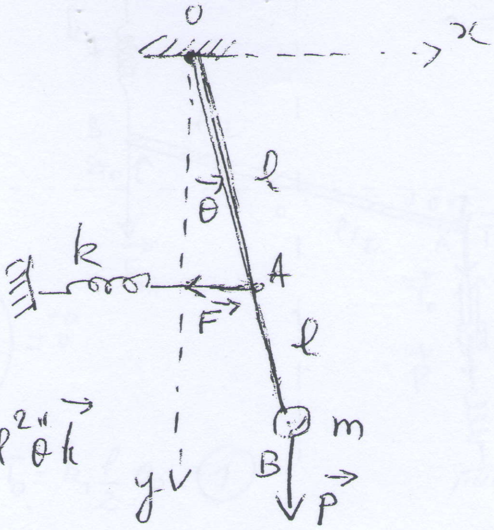
Éq. de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \left(\frac{k_1 b^2 + k_2 a^2}{mb^2}\right)\theta = 0$$

Ex03

Newton: $\sum \vec{M}_{F/O_z} = -J\ddot{\theta}\vec{k}$

$J = ml^2$



$\vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OB} \wedge \vec{P} = -ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$

$$\begin{pmatrix} l\sin\theta \\ l\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -kl\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2l\sin\theta \\ 2l\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{pmatrix} = -ml^2\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$kl^2 \underbrace{\cos\theta}_{\simeq 1} . \theta + 2lmg \underbrace{\sin\theta}_{\simeq \theta} = -ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta}\, ml^2 + (2lmg + kl^2)\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2mg + kl}{ml}\theta = 0$$

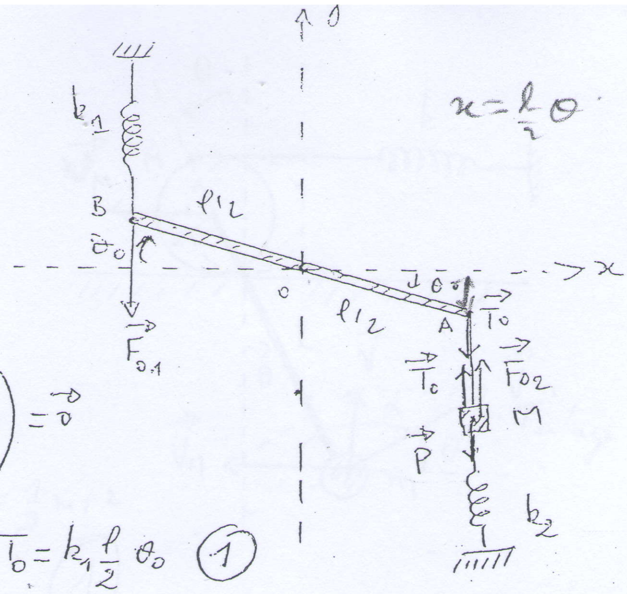
* Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2l\dot{\theta})^2$$

$$E_p = mg2l(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kx^2 \;/\; x = l\theta$$

$L = E_c - E_p \longrightarrow$ Dérivation de l'eq.

Exo 3



$x = \frac{l}{2}\theta$

1°/ Cond d'$\rightleftharpoons$:

barre: $\sum \vec{M}_{/Oz} = \vec{0}$ (0,25)

$$\vec{OB}\wedge\vec{F}_{01} + \vec{OA}\wedge\vec{T}_0 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -l/2\cos\theta_0 \\ l/2\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -k_1 \frac{l}{2}\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l/2\cos\theta_0 \\ -l/2\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -T_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2}\underbrace{\cos\theta_0}_{1} k_1 \frac{l}{2}\underbrace{\sin\theta_0}_{\theta_0} - \frac{l}{2}\underbrace{\cos\theta_0}_{1} T_0 = 0 \Rightarrow T_0 = k_1\frac{l}{2}\theta_0 \quad (1)$$

Masse: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (0,25) $\Rightarrow \vec{F}_{02} + \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow T_0 = Mg - k_2\frac{l}{2}\theta_0$ (1)

Donc: $k_1\frac{l}{2}\theta_0 = Mg - k_2\frac{l}{2}\theta_0 \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \frac{2Mg}{l(k_1+k_2)}}$ (2)

2°/ En mvt: $\begin{cases} \theta_0 \to \theta_0+\theta \\ F_{01} \to F_1 \\ F_{02} \to F_2 \\ T_0 \to T \end{cases}$

barre: $\sum \vec{M}_{/Oz} = -J\ddot\theta\vec{k} \Rightarrow \vec{OB}\wedge\vec{F}_1 + \vec{OA}\wedge\vec{T} = -J\ddot\theta\vec{k}$ (0,25)

$$\begin{pmatrix} -l/2\cos(\theta_0+\theta) \\ l/2\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -k_1 \frac{l}{2}\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l/2\cos(\theta_0+\theta) \\ -l/2\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -T \\ 0 \end{pmatrix} = -J\ddot\theta$$

$$\frac{l}{2}\underbrace{\cos(\theta_0+\theta)}_{1} k_1\cdot\frac{l}{2}\underbrace{\sin(\theta_0+\theta)}_{\theta_0+\theta} - \frac{l}{2}T\underbrace{\cos(\theta_0+\theta)}_{1} = -J\ddot\theta$$

$$\Rightarrow \frac{l}{2}k_1\cdot\frac{l}{2}(\theta_0+\theta) - \frac{l}{2}T = -J\ddot\theta \quad (1)$$

Masse: $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{\gamma}$ (0,25) $\Rightarrow \vec{P} + \vec{F}_2 + \vec{T} = M\cdot\frac{l}{2}\ddot\theta \Rightarrow Mg - k_2\frac{l}{2}(\theta_0+\theta) - T = M\frac{l}{2}\ddot\theta$

$$\rightarrow T = Mg - k_2\frac{l}{2}(\theta_0+\theta) - M\frac{l}{2}\ddot\theta \quad (1)$$

on remplace:

$$\frac{l}{2}k_1\frac{l}{2}(\cancel{\theta_0}+\theta) - \cancel{\frac{l}{2}Mg} + \frac{l}{2}k_2\frac{l}{2}(\cancel{\theta_0}+\theta) + \frac{l}{2}M\frac{l}{2}\ddot\theta = -J\ddot\theta$$

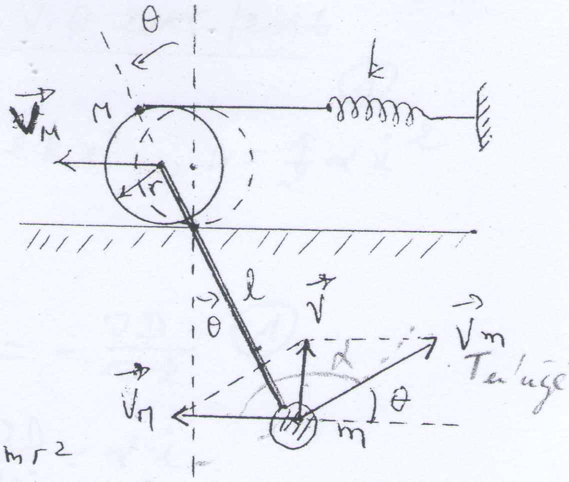
$$\rightarrow \frac{l^2}{4}k_1\theta + \frac{l^2}{4}k_2\theta + \frac{l^2}{4}M\ddot\theta + J\ddot\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{l^2(k_1+k_2)}{4J+Ml^2}\theta = 0} \quad (2)$$

Exo4

$= \frac{1}{2} k (2r\theta)^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2 \Rightarrow E_p = 2kr^2\theta^2 + mg\frac{l}{2}\theta^2$ (1)



$E_c = E_{cM} + E_{cm}$

$E_{cM} = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M V_M^2 \quad / \quad V_M = r\dot{\theta}$ et $J = \frac{1}{2} m r^2$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{2} m r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M r^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M r^2\dot{\theta}^2$ (1)

$E_{cm} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m (\vec{V}_M + \vec{V}_m)^2 = \frac{1}{2}\left[V_M^2 + V_m^2 + 2V_M V_m \underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{-\cos\theta}\right]$

$\frac{1}{2} m (\vec{V}+\vec{V})^2 = \frac{1}{2} m V^2$

$\left.\begin{array}{l} V_M = r\dot{\theta} \\ v_m = l\dot{\theta} \end{array}\right\} \to E_{cm} = \frac{1}{2} m\left[r^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2rl\dot{\theta}^2\cos\theta\right] = \frac{1}{2} m (l-r)^2\dot{\theta}^2$ (1)

$\to \quad E_c = \frac{3}{4} M r^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m (l-r)^2\dot{\theta}^2$

2°/ (0,5) $L = E_c - E_p$ et $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$ (0,5)

$\to L = \left[\frac{3}{4} M r^2 + \frac{1}{2} m (l-r)^2\right]\dot{\theta}^2 - \left(2kr^2 + mg\frac{l}{2}\right)\theta^2$

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \left[\frac{3}{2} M r^2 + m(l-r)^2\right]\dot{\theta} \to \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = \left[\frac{3}{2} M r^2 + m(l-r)^2\right]\ddot{\theta}$

$\frac{\partial L}{\partial\theta} = -(4kr^2 + mgl)\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4kr^2 + mgl}{\frac{3}{2} M r^2 + m(l-r)^2}\theta = 0}$$ (1)

Solution interrogation V.O 2015/2016

Ex 1 (1)

1/ $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $E_p = \frac{1}{2} k (x+x)^2 = 2 k x^2$ (1+1) , $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ (1)

$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - 2 k x^2$

Eq. de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}$ (1)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m \ddot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial x} = -4 k x$, $\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$

on aura : $\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{4k}{m} x = 0 \iff \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (1) (1)

2°/ a) Decrément logarithmique : $\delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = 0{,}287$ (1)

or $\delta = \lambda T^* = \lambda \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\lambda^2 4\pi^2}{\omega_0^2 - \lambda^2}$ (1)

on aura : $\lambda = \frac{\alpha}{2m} = \frac{\omega_0 \delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \omega_0 m \delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$ (1)

$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = 2 \text{ rad/s} \longrightarrow \alpha = 0{,}1826 \text{ N/(m/s)}$. (1) (1)

b) $\delta = \lambda T^* = \frac{\alpha}{2m} T^* \longrightarrow T^* = \frac{2 m \delta}{\alpha} = 3{,}143 \text{ s}$ (1)

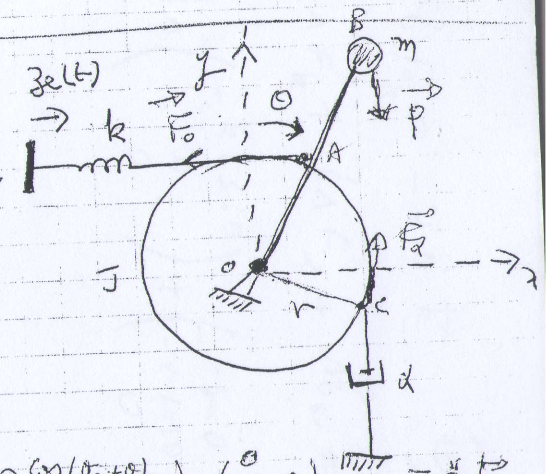
c) Constante de temps :

$\tau = \frac{1}{\lambda} = \frac{2m}{\alpha} = 10{,}95 \text{ s}$. (1) (1)

Mr Zigha

$E_{c_H} =$

Ex 9



1/ Cond d'équilibre : $\sum \vec{\mathcal{M}}_{/oz} = \vec{0}$

$$\vec{OA} \wedge \vec{F_0} + \vec{OB} \wedge \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} r\sin\theta_0 \\ r\cos\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -kr\theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l\sin\theta_0 \\ l\cos\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$kr^2\theta_0 - mgl\theta_0 = 0 \Rightarrow \boxed{kr^2 = mgl}$$

2/ ~~...~~ $\sum \vec{\mathcal{M}}_{/oz} = -J_T \ddot{\theta} \vec{k}$

$$\vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OB} \wedge \vec{P} + \vec{OC} \wedge \vec{F_\alpha} = -J_T \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$\begin{pmatrix} r\sin(\theta_0+\theta) \\ r\cos(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -kr(\theta_0+\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l\sin(\theta_0+\theta) \\ l\cos(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\cos(\theta_0+\theta) \\ -r\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = -J_T \ddot{\theta} \vec{k}$$

$$kr^2(\cancel{\theta_0}+\theta) - lmg(\cancel{\theta_0}+\theta) + \alpha r^2\dot{\theta} = -J_T\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha r^2}{J_T}\dot{\theta} + \frac{kr^2 - lmg}{J_T}\theta = 0} \quad / \; J_T = J + ml^2$$

3/ $L = E_c - E_p$, $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad / \; v = l\dot{\theta}$

$$= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(J+ml^2)\dot{\theta}^2$$

$E_p = \frac{1}{2}kr^2\theta^2 + mgl(\cos\theta - 1)$, $D = \frac{1}{2}\alpha r^2\dot{\theta}^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (J+ml^2)\ddot{\theta}$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kr^2\theta + mgl\theta$

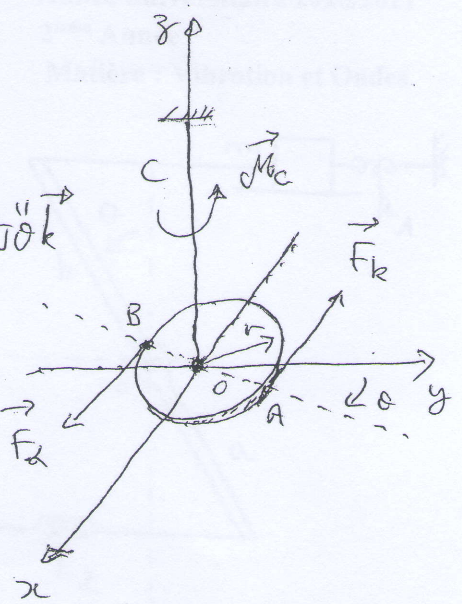
$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha r^2\dot{\theta}$

$$\Rightarrow (J+ml^2)\ddot{\theta} + kr^2\theta - mgl\theta = -\alpha r^2\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kr^2 - mgl}{J+ml^2}\theta + \frac{\alpha r^2}{J+ml^2}\dot{\theta} = 0$$

2:

$\sum \vec{\mathcal{M}}/_{Oz} = -J\ddot{\theta}\,\vec{k}$ Exo10



$\Rightarrow \vec{OA}\wedge\vec{F}_k + \vec{OB}\wedge\vec{F}_\alpha + \vec{\mathcal{M}}_C = -J\ddot{\theta}\,\vec{k}$

$$\begin{pmatrix} r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -kr\sin\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ -r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \vec{\mathcal{M}}_C = -J\ddot{\theta}\,\vec{k}$$

$$k r^2 \underbrace{\cos\theta}_{=1}\,\underbrace{\sin\theta}_{=\theta} + \alpha r^2 \underbrace{\cos\theta}_{=1}\,\dot{\theta} + \underbrace{\mathcal{M}_C}_{C\theta} = -J\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow J\ddot{\theta} + \alpha r^2\dot{\theta} + (kr^2 + C)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha r^2}{J}\dot{\theta} + \frac{kr^2 + C}{J}\theta = 0$$