Université de Jijel
Faculté des Sciences et Technologie
Département d'électronique

Année universitaire 2020/2021
2ieme Année
Matière : Vibration et Ondes

Série de TD N°3

I) Systèmes linéaires forcés à un degré de liberté.

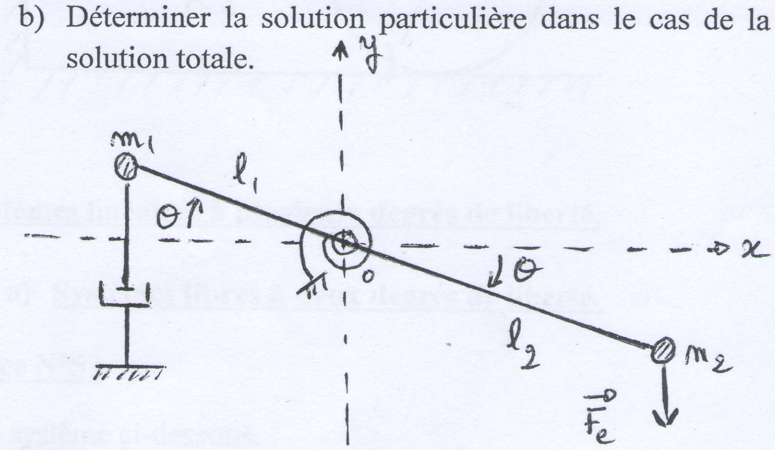
Exercice N°1 :

Soit système de la figure ci-dessous.
Pendant le mouvement, système est soumise à l'action d'une force $\vec{Fe}$

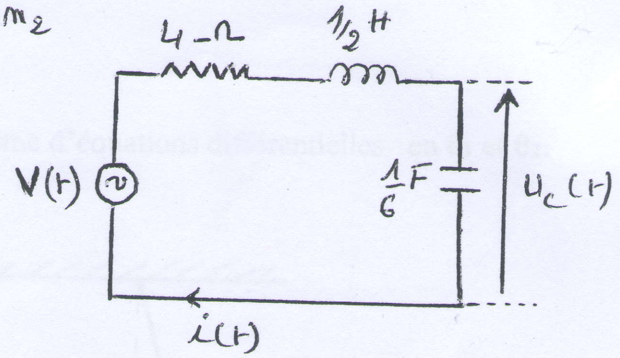
1/ **Fe = 0, $\alpha \neq 0$**
   a) Donner la condition d'équilibre θ_0
   b) Utiliser la méthode de Newton pour déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement des petites oscillations

2/ **Fe = $F_0 \cos(\omega_e t+\varphi)$, $\alpha \neq 0$**
   Donner le circuit électrique équivalent

3/ **Fe = $F_0 \cos(\omega_e t+\varphi)$, $\alpha = 0$**
   a) Que devient l'équation différentielle du mouvement
   b) Déterminer la solution particulière dans le cas de la résonnance et donner la forme de la solution totale.



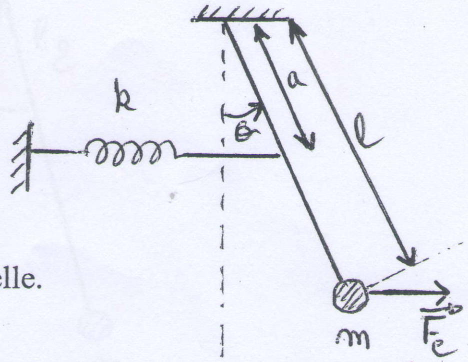
Exercice N°2 :



Soit le circuit **RLC** ci-contre.

1/ Donner l'équation différentielle, qui régit la variation du courant si **v(t) = 20 sin6t** V
2/ Donner la valeur de la constante d'amortissement et de la pulsation propre.
3/ Calculer la solution de l'équation différentielle. Si à **t = 0, i(0) = 0 et $U_c(0) = 0$**

Exercice N°3 :



Soit système de la figure ci-contre.
A l'équilibre, **θ = 0** et les ressorts ne sont pas déformés.
Pendant le mouvement, m est soumise à l'action d'une force $\vec{Fe}$
1/ Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer l'équation différentielle.

C.ZIGHA

versité de Jijel
aculté des Sciences et Technologie
Département d'électronique

Exercice N°4 :

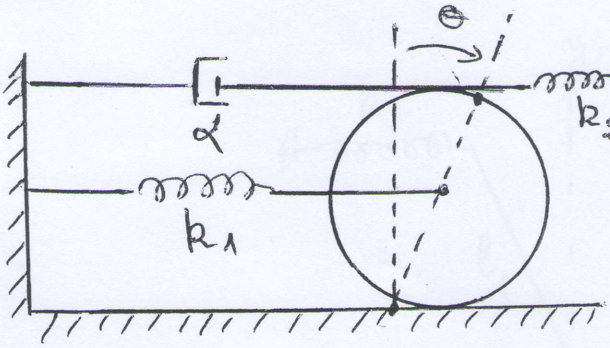
Pour le système ci-dessous ou le disque de moment d'inertie **($J=Mr^2/2$)**, peut rouler sans glisser sur le plan horizontal. **$Z_e(t)$** est une excitation donnée comme déplacement qui agit pendant le mouvement.

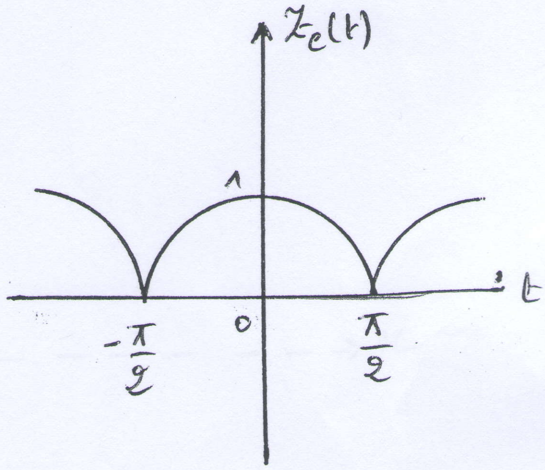
A l'équilibre, **$\theta = 0$** et les ressorts ne sont pas déformés.

1/ Utiliser la méthode de Lagrange pour déterminer l'équation différentielle régissant le mouvement des petites oscillations.

2/ Si **$Z_e(t) = |\cos(t)|$** pour **$-\pi/2 \le t \le \pi/2$** figure ci-dessous, donner son développement en séries de **Fourier**. On donne **$\cos a \cos b = [\cos(a+b) + \cos(a-b)]/2$**

3/ En considérant le 2ème terme de cette serie, calculer la solution permanente du système.





II) Systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté.

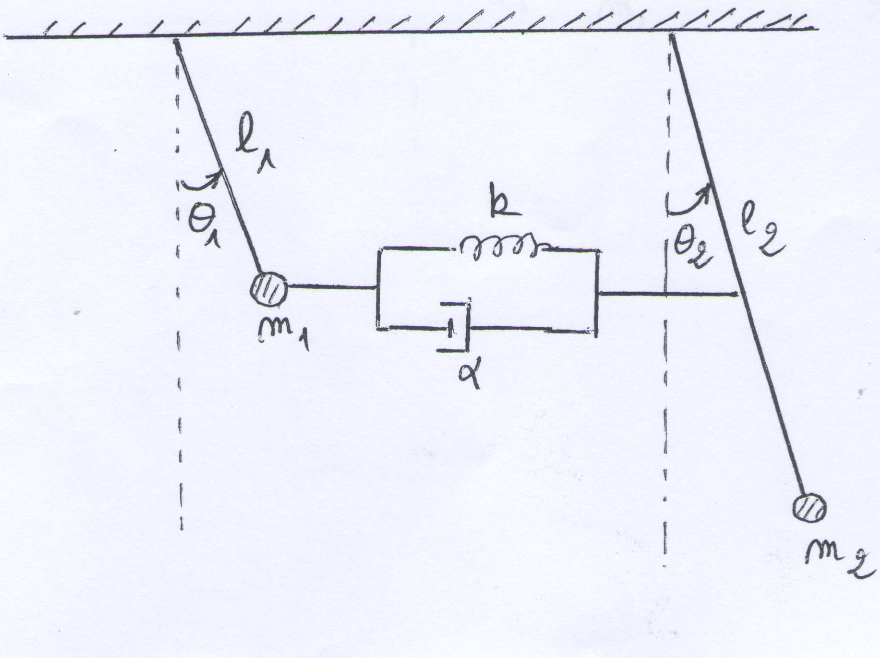
a) Systèmes libres à deux degrés de liberté.

Exercice N°5 :

Pour le système ci-dessous.

1/ Utiliser la méthode de Newton pour déterminer le système d'équations différentielles en **θ_1** et **θ_2**.

2/ Donner le circuit électrique équivalent.



…ersité de Jijel
…ulté des Sciences et Technologie
…épartement d'électronique

b) Systèmes forcés à deux degrés de liberté.

Exercice N°6 :

Soit système de la figure ci-dessous, ou $\vec{F}(t)$ est l'excitation donnée comme force.

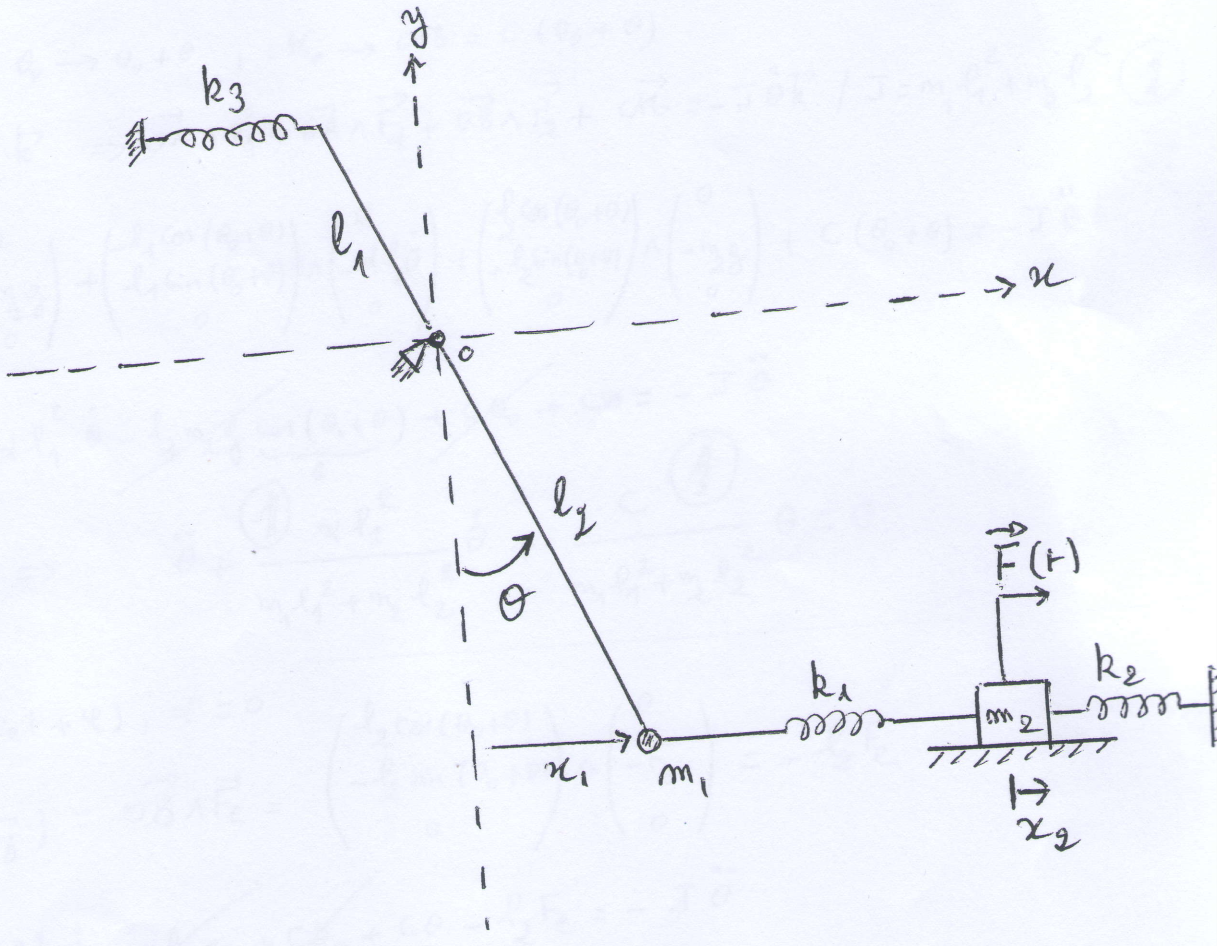
A l'équilibre, $x = 0$ et le ressort n'est pas déformé.

1/ Utiliser la méthode de Newton pour déterminer le système d'équations différentielles en θ et x.

2/ Retrouver le résultat par la méthode de Lagrange.

3/ Réécrive le système en x_1 et x_2.

4/ Donner le circuit électrique équivalent.

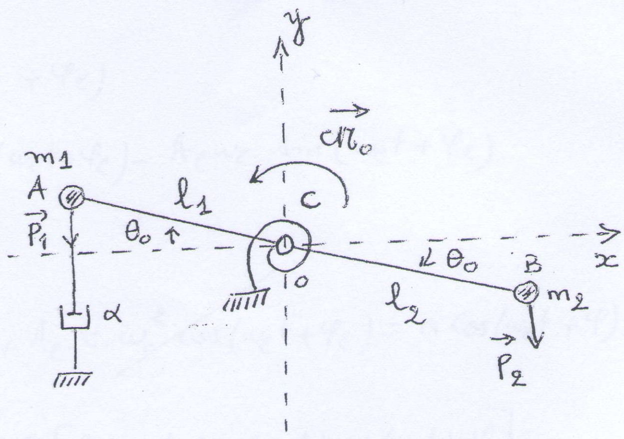


C.ZIGHA

Correction Interrogation Phys.3 2013/2014

$e = 0, \alpha \neq 0$

Equilibre : $\mathcal{M}_0 = C\theta_0$



$$\sum \vec{\mathcal{M}}/_{\vec{oz}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA}\wedge\vec{P_1} + \vec{OB}\wedge\vec{P_2} + \vec{\mathcal{M}_0} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -l_1\cos\theta_0 \\ l_1\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2\cos\theta_0 \\ -l_2\sin\theta_0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} + C\theta_0 = 0$$

$$l_1 m_1 g \underbrace{\cos\theta_0}_{1} - l_2 m_2 g \underbrace{\cos\theta_0}_{1} + C\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \frac{l_2 m_2 g - l_1 m_1 g}{C} \quad 1$$

2°/ Mouvement : $\theta_0 \longrightarrow \theta_0 + \theta$, $\mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{M} = C(\theta_0+\theta)$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}/_{\vec{oz}} = -J\ddot{\theta}\vec{k} \Rightarrow \vec{OA}\wedge\vec{P_1} + \vec{OA}\wedge\vec{F_\alpha} + \vec{OB}\wedge\vec{P_2} + \vec{\mathcal{M}} = -J\ddot{\theta}\vec{k} \ / \ J = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 \quad 1$$

$$\begin{pmatrix} -l_1\cos(\theta_0+\theta) \\ l_1\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_1\cos(\theta_0+\theta) \\ l_1\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -\alpha l_1\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2\cos(\theta_0+\theta) \\ -l_2\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \\ 0 \end{pmatrix} + C(\theta_0+\theta) = -J\ddot{\theta}\vec{k}$$

$$\cancel{l_1 m_1 g \underbrace{\cos(\theta_0+\theta)}_{1}} + \alpha l_1^2\dot{\theta} - \cancel{l_2 m_2 g \underbrace{\cos(\theta_0+\theta)}_{1}} + \cancel{C\theta_0} + C\theta = -J\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha l_1^2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\dot{\theta} + \frac{C}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\theta = 0 \quad 1 \quad 1$$

B) $F_e = F_0\cos(w_e t + \varphi)$, $\alpha = 0$

$$1°/ \ \vec{\mathcal{M}}(\vec{F_e}/_{\vec{oz}}) = \vec{OB}\wedge\vec{F_e} = \begin{pmatrix} l_2\cos(\theta_0+\theta) \\ -l_2\sin(\theta_0+\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_e \\ 0 \end{pmatrix} = -l_2 F_e$$

$$\Rightarrow \cancel{l_1 m_1 g} + \underbrace{\alpha l_1^2\dot{\theta}}_{0} - \cancel{m_2 l_2 g} + \cancel{C\theta_0} + C\theta - l_2 F_e = -J\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\theta = \frac{l_2 F_0}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}\cos(w_e t + \varphi) \quad 1 \quad 1$$

2°/ L'éq. diff. peut se mettre sous la forme :

$$\ddot{\theta} + w_0^2\theta = a\cos(w_e t + \varphi)$$

lution particulière dans le cas de la résonance : $\theta_p = A_e.t.\cos(w_e t+\varphi_e)$ 1

avec $w_e = w_0$ 1

$$\dot{\theta}_p = -A_e w_e.t.\sin(w_e t+\varphi_e) + A_e\cos(w_e t+\varphi_e).$$

$$\ddot{\theta}_p = -A_e w_e^2.t.\cos(w_e t+\varphi_e) - A_e.w_e\sin(w_e t+\varphi_e) - A_e w_e\sin(w_e t+\varphi_e).$$

on remplace dans l'eq. diff, on aura :

$$\cancel{-A_e w_e^2.t.\cos(w_e t+\varphi_e)} - 2A_e.w_e\sin(w_e t+\varphi_e) + \cancel{A_e.t.w_0^2\cos(w_e t+\varphi_e)} = a\cos(w_e t+\varphi).$$

$$-2A_e w_e\left[\sin w_e.t\cos\varphi_e + \cos w_e t.\sin\varphi_e\right] = a\left[\cos w_e t\cos\varphi - \sin w_e t\sin\varphi\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A_e.w_e\cos\varphi_e = -a\sin\varphi & \text{— (a)} \\ -2A_e.w_e\sin\varphi_e = a\cos\varphi & \text{— (b)} \end{cases}$$

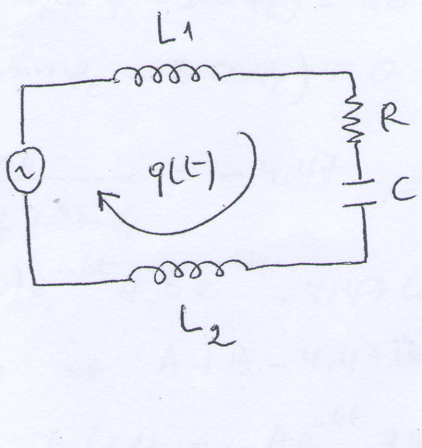
$$\frac{(b)}{(a)} \Rightarrow tg\,\varphi_e = -\cot g\,\varphi \quad 1, \quad (a)^2+(b)^2 \Rightarrow 4A_e^2 w_e^2 = a^2 \Rightarrow A_e = \frac{a}{2w_e} \quad 1$$

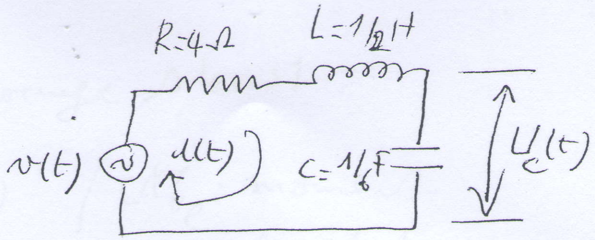
c) $F_e = F_0\cos(w_e t+\varphi)$, $\alpha \neq 0$

l'eq. diff et donc :

$$(m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2)\ddot{\theta} + \alpha l_1^2\dot{\theta} + C\theta = \underbrace{l_2 F_e}_{\text{moment}}$$

$$\begin{array}{ccccc} m_1 l_1^2 & m_2 l_2^2 & \alpha l_1^2 & C & l_2 F_e \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ L_1 & L_2 & R & 1/C & u(t) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$





1/ Kirchoff : $\sum U_i = v(t)$.

$\Rightarrow \quad 4i + \frac{1}{2}\dot{i} + 6\int i\,dt = 20\sin 6t$

on dérive : $4\dot{i} + \frac{1}{2}\ddot{i} + 6i = 120\cos 6t$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{i} + 8\dot{i} + 12i = 240\cos 6t}$$

2°/ l'éq. peut se mettre sous la forme : $\ddot{i} + 2\lambda\dot{i} + \omega_0^2 i = f(t)$.

donc $2\lambda = 8 \rightarrow \lambda = 4\,s^{-1}$: constante d'amortissement

$\omega_0^2 = 12 \rightarrow \omega_0 = 2\sqrt{3}$ rad/s : pulsation propre du système

3°/ $i(t) = i_h(t) + i_p(t)$

solution homogène → solution particulière.

* $i_h(t)$: éq. caractéristique : $P^2 + 8P + 12 = 0$, $\Delta' = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \begin{cases} P_1 = -6 \\ P_2 = -2 \end{cases}$

donc $i_h(t) = Ae^{-6t} + Be^{-2t}$

* $i_p(t)$: $A_e\cos(6t + \varphi_e)$, on dérive et on remplace dans l'éq. diff :

$-36A_e\cos(6t+\varphi_e) - 48A_e\sin(6t+\varphi_e) + 12A_e\cos(6t+\varphi_e) = 240\cos 6t$

$-24A_e[\cos 6t\cos\varphi_e - \sin 6t\sin\varphi_e] - 48A_e[\sin 6t\cos\varphi_e + \cos 6t\sin\varphi_e] = 240\cos 6t$

$\Rightarrow -A_e[\cos 6t\cos\varphi_e - \sin 6t\sin\varphi_e] - 2A_e[\sin 6t\cos\varphi_e + \cos 6t\sin\varphi_e] = 10\cos 6t$

$$\begin{cases} -A_e(\cos\varphi_e + 2\sin\varphi_e) = 10 \\ A_e(\sin\varphi_e - 2\cos\varphi_e) = 0 \Rightarrow tg\,\varphi_e = 2 \Rightarrow \varphi_e = 63,43° \end{cases}$$

$A_e = \dfrac{-10}{\cos\varphi_e + 2\sin\varphi_e} = -4,47$, donc $i_p(t) = -4,47\cos(6t + 63,43°)$.

et $i(t) = Ae^{-6t} + Be^{-2t} - 4,47\cos(6t + 63,43°)$

4°/ à $t=0$ $i(t) = 0 \Rightarrow A + B - 4,47\cos 63,43° = 0 \Rightarrow A + B = 2$

$u_c(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt = 6\int i\,dt = -Ae^{-6t} - 3Be^{-6t} - \frac{4,47}{6}\times 6\sin(6t + 63,43)$.

$u_c(0) = 0 \Rightarrow -A - 3B = 4 \Rightarrow \begin{cases} A = 5 \\ B = -3 \end{cases}$

donc $\boxed{i(t) = 5e^{-6t} - 3e^{-2t} - 4,47\cos(6t + 63,43°)}$

5/:

système en rotation $\Rightarrow$ l'éq de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \mathcal{M}_e(t) \quad / \quad \mathcal{M}_e : \text{moment excitateur}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 \quad , \quad E_p = \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 + mgl(1-\cos\theta).$$

$$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 - \frac{1}{2} k a^2 \theta^2 - mgl(1-\cos\theta).$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = m l^2 \ddot\theta \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -k a^2 \theta - mgl \underbrace{\sin\theta}_{\theta}$$

$$\mathcal{M}_e(t) = l F_e(t)$$

$$\Rightarrow m l^2 \ddot\theta + k a^2 \theta^2 + mgl\theta = l F_e(t)$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{ka^2 + mgl}{ml^2}\,\theta = \frac{F_e}{ml}}$$

Solution Examen V.O 2017/2018

Exo 1

1/ $E_C = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$, $x = r\theta \Rightarrow \dot{x} = r\dot{\theta}$

$= \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} M r^2 \dot{\theta}^2$ (1) (1)

$E_p = \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (2r\theta - z_e)^2$ (1) (1) , $D = \frac{1}{2}\alpha \dot{y}^2$; $y = 2r\theta \Rightarrow \dot{y} = 2r\dot{\theta}$

$= \frac{1}{2}\alpha (2r\dot{\theta})^2 = 2\alpha r^2 \dot{\theta}^2$ (1)

2/ $L = E_c - E_p$

$= \frac{3}{4} M r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 - \frac{1}{2} k_2 (2r\theta - z_e)^2$

Eq. de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$ (1)

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2} M r^2 \ddot{\theta}$; $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -k_1 r^2 \theta - k_2 (2r\theta - z_e) 2r$; $\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 4\alpha r^2 \dot{\theta}$

on aura : $\ddot{\theta} + \frac{8\alpha}{3M}\dot{\theta} + \frac{2(k_1 + 4k_2)}{3M}\theta = \frac{4k_2}{3Mr} z_e$ (1) (1) (1) (1)

3/ $z_e(t)$ paire $\Rightarrow b_n = 0$ (0,5) , $T = \pi \Rightarrow w = 2$ rad/s (0,5)

$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int z_e(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t\,dt = \frac{2}{\pi} \sin t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$ (0,5)

$a_n = \frac{2}{T}\int z_e(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot \cos 2nt\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2n+1)t + \cos(2n-1)t}{2}\,dt$

$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \cos(2n+1)t\,dt + \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)t\,dt\right] = \frac{4}{\pi(4n^2-1)}(-1)^{n+1}$ (0,5)

$\Rightarrow z_e(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(4n^2-1)}(-1)^{n+1} \cos 2nt$

4/ 2ème terme de la S.F $\Rightarrow z_e(t) = \frac{4}{3\pi}\cos 2t$ (0,5)

L'éq. diff. peut se mettre sous la forme :

$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = a \cos 2t$ avec $\begin{cases} 2\lambda = \frac{8\alpha}{3M} \\ \omega_0^2 = \frac{2(k_1+4k_2)}{3M} \\ a = \frac{16}{9\pi}\frac{k_2}{Mr} \end{cases}$

Solution permanente = solution particulière.

$\theta_p = A_e \cos(2t + \varphi_e)$ (0,5), on dérive et on remplace dans l'équation (voir cours), on aura :

$A_e = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - 4)^2 + 16\lambda^2}}$ (0,5) et $\varphi_e = \operatorname{arctg} \frac{-4\lambda}{\omega_0^2 - 4}$ (0,5)

1)

(0,5) (0,5)

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2$$

(0,5) (0,5) (0,5)

$$E_p = m_1 g l_1 (1-\cos\theta_1) + m_2 g l_2 (1-\cos\theta_2) + \frac{1}{2} k (l_1\theta_1 - l_1\theta_2)^2$$

(0,5)

$$D = \frac{1}{2}\alpha (l_1\dot{\theta}_1 - l_1\dot{\theta}_2)^2 \; ; \quad L = E_c - E_p \quad (0,5)$$

* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1}$ (0,5) ; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \theta_1 - k l_1 (l_1\theta_1 - l_1\theta_2) \; ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = \alpha l_1^2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

on aura : $m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + \alpha l_1^2 \dot{\theta}_1 + (k l_1^2 + m_1 g l_1)\theta_1 = k l_1^2 \theta_2 + \alpha l_1^2 \dot{\theta}_2$ (1)

* $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2}$ (0,5) ; $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 l_2 \ddot{\theta}_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = -m_2 g l_2 \theta_2 + k l_1^2 (\theta_1 - \theta_2) \; ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = -\alpha l_1^2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

on aura : $m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (m_2 g l_2 + k l_1^2)\theta_2 + \alpha l_1^2 \dot{\theta}_2 = k l_1^2 \theta_1 + \alpha l_1^2 \dot{\theta}_1$ (1)

2°/ $m_1 \longleftrightarrow L_1$ (0,25)

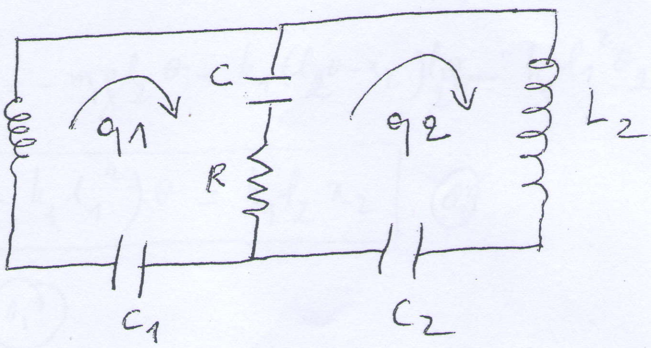
$m_2 \longleftrightarrow L_2$ (0,25)

$m_1 g l_1 \longleftrightarrow C_1$ (0,25)

$m_2 g l_2 \longleftrightarrow C_2$ (0,25)

$k \longleftrightarrow C$ (0,25)

$\alpha \longleftrightarrow R$ (0,25)



$$m_2\ddot{x}_2+(k_1+k_2)x_2 = k_1x_1 + F(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}_1+\left[\dfrac{g}{l_2}+\dfrac{k_1}{m_1}+\dfrac{k_3}{m_1}\left(\dfrac{l_1}{l_2}\right)^2\right]x_1 = \dfrac{k_1}{m_1}x_2 & (1) \\[2ex] \ddot{x}_2+\left(\dfrac{k_1+k_2}{m_2}\right)x_2 = \dfrac{k_1}{m_2}x_1+\dfrac{F(t)}{m_2} & (1)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\underbrace{m_1l_2}_{L_1}\ddot{x}_1+\Big(\underbrace{m_1g}_{C}+\underbrace{k_1l_2}_{C_1}+\underbrace{k_3\,l_1^2/l_2}_{C_3}\Big)x_1 = k_1l_2x_2 \\[2ex] \underbrace{m_2}_{L_2}\ddot{x}_2+\underbrace{(k_1+k_2)}_{C_2}x_2 = k_1x_1+\underbrace{F(t)}_{v(t)}\end{cases}$$