Université de Jijel - Faculté des Sciences Exactes et Informatique

Département de Physique.

3ème Licence Physique des Matériaux (2020/2021)

Module: MQII.

Série d'exercices n° 02

Ex. 01:

1) Calculer les harmoniques sphériques Y_1^0 et Y_1^1 puis en déduire Y_1^{-1}.

2) **Supposons qu'un électron est dans un état décrit par la fonction d'onde:**

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{2}\left(e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta\right)e^{-r/2}$$

i) **Exprimer ψ en fonction des harmoniques sphériques puis déterminer la constante A pour qu'elle soit normalisée.**

ii) **La fonction ψ est-elle fonction propre de L^2 ou de L_z ?**

On donne: $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}e^{-r}dr.$

Ex. 02:

Soit $|\ell, m\rangle$ un état propre de l'opérateur L^2 et L_z :

$$L^2|\ell,m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell,m\rangle, \quad L_z|\ell,m\rangle = \hbar m|\ell,m\rangle$$

1) **Exprimer L_x en fonction de L_+ et L_- .**

2) **Calculer pour cet état: $\langle L_x\rangle = \langle \ell, m| L_x |\ell, m\rangle$ et $\langle L_x^2\rangle$.**

Ex. 03:

Considérons un système dans un état $|\psi\rangle$ donné en fonction des états propres $|\ell, m\rangle$ du moment orbital comme suit:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|1,-1\rangle + A|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,1\rangle$$

où A est une constante réelle.

(a) Ecrire le bra $\langle\psi|$. (b) **Ecrire la relation d'orthonormalisation relative à la base $\{|\ell, m\rangle\}$.** (c) **Calculer A pour que $|\psi\rangle$ soit normalisé.**

(d) L'état $|\psi\rangle$ est-il un état propre de L^2 ou de L_z ?

(e) Si on effectue une mesure de L_z, quelles sont les valeurs possibles obtenues et avec quelles probabilités ?

(f) Trouver $\langle L_z \rangle$.

<u>Ex.04</u> : (**T. personnel**)

On considére un système physique dont le moment cinétique $\overrightarrow{J}$ est défini par la valeur $j = 1$.

a) Trouver les matrices représentatives des opérateurs J^2, J_z, $J_\pm$, J_x et J_y.

b) Trouver les vecteurs propres communs à J^2 et J_z puis vérifier qu'ils forment une base complète et orthonormée.

c) Utiliser les matrices J_x , J_y et J_z pour calculer les commutateurs $[J_x, J_y]$, $[J_y, J_z]$ et $[J_z, J_x]$.

d) Vérifier qu'on a $J_z^3 = \hbar^2 J_z$.

<u>Ex. 05:</u>

Un système de deux particules de spins $s_1 = \frac{3}{2}$ et $s_2 = \frac{1}{2}$ est décrit par l'hamiltonien effectif:

$$H = A\left(S_{1z} + S_{2z}\right)^2 + B\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2$$

où A et B sont des constantes. Soit la base $\{|s_1, s_2, m_1, m_2\rangle\}$ de l'espace produit tensoriel $\xi = \xi(s_1) \otimes \xi(s_2)$ commune à l'ensemble $\{S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}\}$, et soit une deuxième base $\{|s, m\rangle\}$ commune à l'ensemble $\{S_1^2, S_2^2, S^2, S_z\}$ avec $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2$.

1) a) Quelles sont les valeurs possibles de s ? b) Calculer dim(ξ).

2) a) Montrer que les états $|s, m\rangle$ sont états propres de H.

b) Donner ainsi l'énergie $E_{s,m}$ en fonction de A et B pour chaque valeurs de s et m. Est-ce-qu'il y a de dégénérescence ?

3) Trouver les C-G a , b et c tels que:

$$|2,2\rangle = a\left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$|2,1\rangle = b\left|s_1, s_2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle + c\left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

4) Développer le ket $|1,1\rangle$ sur la base standard $\{|s_1, s_2, m_1, m_2\rangle\}$ en respectant les règles de sélection. Puis, trouver les C-G associés de façon que $\langle 1,1\,|2,1\rangle = 0$.

N. Ferkous

Solution

Ex. 01:

1) Pour calculer les harmoniques sphériques Y_1^0 et Y_1^1, il faut appliquer la formule vue en cours. On obtient

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi}$$

pour déduire Y_1^{-1}, on peut appliquer la formule

$$Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m \left[Y_\ell^m(\theta,\varphi)\right]^*$$

et on aura

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\varphi}$$

2) i) On a:

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{2}\left(e^{i\phi}\sin\theta + \cos\theta\right)e^{-r/2}$$

ψ en fonction des harmoniques sphériques:

$$\begin{aligned}\psi(r,\theta,\varphi) &= \frac{A}{2}\left(-\sqrt{\frac{8\pi}{3}}Y_1^1 + \sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\right)e^{-r/2}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{3}}A\left(-\sqrt{2}Y_1^1 + Y_1^0\right)e^{-r/2}\end{aligned}$$

ψ est normalisée si:

$$\int_{espace}\psi^*\psi dv = 1$$

c'est-à-dire:

$$\frac{\pi}{3}|A|^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left(-\sqrt{2}\left(Y_1^1\right)^* + \left(Y_1^0\right)^*\right)\left(-\sqrt{2}Y_1^1 + Y_1^0\right)\sin\theta d\theta d\varphi\int_0^\infty e^{-r}r^2 dr = 1$$

On a:

$$\int_0^\infty r^2 e^{-r}dr = \Gamma(3) = 2! = 2$$

et puisque:

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\left[Y_{\ell'}^{m'}(\theta,\varphi)\right]^* Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

il vient:

$$\frac{2\pi}{3}|A|^2(2+1) = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

Alors:

$$\boxed{\psi\left(r,\theta,\varphi\right)=\tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{2}Y_1^1+Y_1^0\right)\mathrm{e}^{-r/2}}$$

ii)

$$\begin{aligned}L^2\psi &= L^2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{2}Y_1^1+Y_1^0\right)e^{-r/2}\right)\\ &= 2\hbar^2\psi, \qquad \left(\text{ puisque } L^2Y_\ell^m=\hbar^2\ell\left(\ell+1\right)Y_\ell^m\ \right)\\ &\Rightarrow \psi \text{ est fonction propre de } L^2.\end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned}L_z\psi &= L_z\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\sqrt{2}Y_1^1+Y_1^0\right)e^{-r/2}\right)\\ &= -\hbar\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}Y_1^1e^{-r/2}, \qquad \left(\text{ puisque } L_zY_\ell^m=\hbar mY_\ell^m\ \right)\\ &\neq (\text{valeur propre})\psi\\ &\Rightarrow \psi \text{ n'est pas fonction propre de } L_z\end{aligned}$$

<u>Ex. 02</u>:

1)

$$\begin{cases} L_+=L_x+iL_y\\ L_-=L_x-iL_y\end{cases} \Rightarrow L_x=\frac{1}{2}\left(L_++L_-\right)$$

2) Soit $|\ell,m\rangle$ un état propre de l'opérateur L^2 et L_z :

$$L^2\left|\ell,m\right\rangle=\hbar^2\ell\left(\ell+1\right)\left|\ell,m\right\rangle, \quad L_z\left|\ell,m\right\rangle=\hbar m\left|\ell,m\right\rangle$$

alors

$$\begin{aligned}\left\langle L_x\right\rangle &= \left\langle\ell,m\right|L_x\left|\ell,m\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle\ell,m\right|\left(L_++L_-\right)\left|\ell,m\right\rangle=0\\ \left\langle L_x^2\right\rangle &= \frac{1}{4}\left\langle\ell,m\right|\left(L_+^2+L_-^2+L_+L_-+L_-L_+\right)\left|\ell,m\right\rangle.\\ &= \frac{1}{4}\left\langle\ell,m\right|\left(L_+L_-+L_-L_+\right)\left|\ell,m\right\rangle.\end{aligned}$$

mais (voir le cours)

$$L^2=\frac{1}{2}\left(L_+L_-+L_-L_+\right)+L_z^2$$

il vient

$$\left\langle L_x^2\right\rangle=\frac{1}{2}\left\langle L^2-L_z^2\right\rangle=\frac{\hbar^2}{2}\left[\ell\left(\ell+1\right)-m^2\right]$$

Ex. 03:

(a) Le bra $\langle\psi|$:

$$\langle\psi| = \frac{1}{2}\langle 1,-1| + A\langle 1,0| + \frac{1}{2}\langle 1,1|$$

(b) La relation d'orthonormalisation relative à la base $\{|\ell,m\rangle\}$:

$$\langle \ell',m' |\ell,m\rangle = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{m,m'}$$

(c) $|\psi\rangle$ est normalisé c-à-d :

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} + A^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{A = \tfrac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\text{donc} \quad |\psi\rangle = \frac{1}{2}|1,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{1}{2}|1,1\rangle$$

(d) On a

$$L^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle \Rightarrow |\psi\rangle \text{ est un état propre de } L^2$$

mais

$$L_z|\psi\rangle = -\frac{\hbar}{2}|1,-1\rangle + \frac{\hbar}{2}|1,1\rangle \neq (\text{valeur})\,|\psi\rangle$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle \text{ n'est pas un état propre de } L_z$$

(e) Si on effectue une mesure de L_z, les valeurs possibles obtenues sont $\pm\hbar$ et 0.

Les probabiltés de trouver ces valeurs sont

$$\mathcal{P}(\hbar) = |\langle 1,1|\,\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}, \qquad \mathcal{P}(0) = |\langle 1,0|\,\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}(-\hbar) = |\langle 1,-1|\,\psi\rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

(d) La valeur moyenne $\langle L_z\rangle$:

$$\langle L_z\rangle = \langle\psi|\,(L_z|\psi\rangle) = \left(\frac{1}{2}\langle 1,-1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,0| + \frac{1}{2}\langle 1,1|\right)\left(-\frac{\hbar}{2}|1,-1\rangle + \frac{\hbar}{2}|1,1\rangle\right)$$
$$= -\frac{\hbar}{4} + \frac{\hbar}{4} = 0.$$

Ex. 05:

1) a) Les valeurs possibles de s : on a $|s_1 - s_2| \leq s \leq |s_1 + s_2| \Rightarrow 1 \leq s \leq 2 \Rightarrow \boxed{s = 1,\, 2}$

b) $\dim(\xi) = (2s_1+1)(2s_2+1) \Rightarrow \boxed{\dim(\xi) = 8}$

2) Les états $|s, m\rangle$ sont états propres de H :

$$\begin{aligned}
H|s, m\rangle &= \left[A\left(S_{1z}+S_{2z}\right)^2+B\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2\right]|s, m\rangle=\left[AS_z^2+\tfrac{B}{2}\left(S^2-S_1^2-S_2^2\right)\right]|s, m\rangle \\
&= \left[A\hbar^2 m^2+\tfrac{B\hbar^2}{2}\left(s(s+1)-\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3}{2}+1\right)-\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+1\right)\right)\right]|s, m\rangle \\
&= \left\{A\hbar^2 m^2+\tfrac{B\hbar^2}{2}\left[s(s+1)-\tfrac{9}{2}\right]\right\}|s, m\rangle
\end{aligned}$$

Donc les états $|s, m\rangle$ sont états propres de H avec les valeurs propres

$$\boxed{E_{s,m}=A\hbar^2 m^2+\tfrac{B\hbar^2}{2}\left[s(s+1)-\tfrac{9}{2}\right]}$$

pour $s=1 \Rightarrow m=1,0,-1$ c-à-d: $E_{1,m}=\hbar^2\left(Am^2-\frac{5}{4}B\right)$

$$\Rightarrow\begin{cases} E_{1,\pm1}=\hbar^2\left(A-\tfrac{5}{4}B\right) \\ E_{1,0}=-\tfrac{5\hbar^2}{4}B\end{cases}$$

pour $s=2 \Rightarrow m=2,1,0,-1,-2$ c-à-d: $E_{2,m}=A\hbar^2 m^2+\frac{3}{4}B\hbar^2$

$$\Rightarrow\begin{cases} E_{2,\pm2}=\hbar^2\left(4A+\tfrac{3}{4}B\right) \\ E_{2,\pm1}=\hbar^2\left(A+\tfrac{3}{4}B\right) \\ E_{2,0}=\tfrac{3\hbar^2}{4}B\end{cases}$$

Oui, il y a dégénéréscenec des niveaux $E_{s,m}=E_{s,-m}$.

3) Développement du ket $|2,2\rangle$ sur la base $\{|s_1, s_2, m_1, m_2\rangle\}$:

$$\begin{aligned}
|2,2\rangle &= \textstyle\sum_{m_1,m_2}\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right\rangle\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right|2,2\rangle \\
&= \textstyle\sum_{m_1,m_2}\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right|2,2\rangle\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right\rangle \\
&= \left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right|2,2\rangle\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle \Rightarrow a=\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right|2,2\rangle
\end{aligned}$$

avec la condition de normalisation $a^2=1$ c-à-d $a=\pm1$ et la convention de phase $\langle j_1, j_2, j_1, j-j_1|\, j, j\rangle>0 \Rightarrow \boxed{a=1}$. Donc:

$$|2,2\rangle=\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Le ket $|2,1\rangle$ peut être trouvé en appliquant l'opérateur $S_-=(S_1)_-+(S_2)_-$ sur le ket $|2,2\rangle$:

$$\begin{aligned}
S_-|2,2\rangle &= \left[(S_1)_-+(S_2)_-\right]\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
&\Rightarrow 2\hbar|2,1\rangle=\hbar\sqrt{3}\left|s_1,s_2,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle+\hbar\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
&\Rightarrow |2,1\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|s_1,s_2,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle+\frac{1}{2}\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle
\end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow b = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \quad c = \tfrac{1}{2}}$$

4) Soit le vecteur $|1,1\rangle$

$$\begin{aligned}|1,1\rangle &= \textstyle\sum_{m_1,m_2} \left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right\rangle \left\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right| 1,1\rangle \\ &= \left\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right| 1,1\rangle \left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right| 1,1\rangle \left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle \\ &= d\left|s_1,s_2,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle + e\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right\rangle\end{aligned}$$

où d et e sont les C-G :

$$d = \left\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right| 1,1\rangle \quad \text{et } e = \left\langle \tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\right| 1,1\rangle$$

On a $\langle 1,1\,|2,1\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}d + \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow d = -\frac{e}{\sqrt{3}}$. Le ket $|1,1\rangle$ est normé alors:

$$d^2 + e^2 = 1 \Rightarrow \frac{e^{\,2}}{3} + e^2 = 1 \Rightarrow e = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et la convention de phase $\langle j_1,j_2,j_1,j-j_1|\, j,j\rangle > 0 \Rightarrow e > 0$

$$\Rightarrow \boxed{e = \tfrac{\sqrt{3}}{2}} \text{ et par suite } \boxed{d = -\tfrac{1}{2}}.$$