Université de Jijel-Faculté SEI-Département de Physique

3ème Licence Physique Fondamentale (2015/2016)

Module: Relativité restreinte.

Durée: 2h

Examen

Exercice 01 : (4 pts)

Le tenseur du champ électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ se transforme, lors d'une transformation de Lorentz, selon la loi suivante:

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

où $L^{\mu}{}_{\alpha}$ est la matrice de Lorentz.

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L^{\mu}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouver les formules de transformation des champs électrique et magnétique en calculant les composantes suivantes:

$$F'^{01} \ , \quad F'^{02} \ , \ F'^{03} \ , F'^{12} \ , \ F'^{13} \text{ et } \ F'^{23}$$

Exercice 02 : (5 pts)

On réalise la collision suivante entre un photon et un proton ($m_p = 938.25$ MeV/c^2) immobile dans le référentiel du laboratoire (R):

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$$

collision engendrant un neutron ($m_n = 939.55$ MeV/c^2) et un pion ($m_\pi = 139.6$ MeV/c^2).

1) Établir la relation entre l'énergie $E_\gamma = p_\gamma c$ dans (R) du photon incident et l'énergie totale du système dans le référentiel du centre de masse (R^*).

2) Montrer que cette réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie du photon E_γ est supérieure à une valeur limite E_0 que l'on déterminera. Application numérique.

<u>Exercice 03 :</u> (03 pts)

On donne les formules de transformation de Lorentz des champs électromagnétiques:

$$\begin{cases} E_x = E'_x \\ E_y = \gamma\left(E'_y + \beta c B'_z\right) \\ E_z = \gamma\left(E'_z - \beta c B'_y\right) \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} B_x = B'_x \\ B_y = \gamma\left(B'_y - \frac{\beta}{c} E'_z\right) \\ B_z = \gamma\left(B'_z + \frac{\beta}{c} E'_y\right) \end{cases} \quad . \quad ,$$

Montrer l'invariance relativiste des quantités $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{E}^2 - c^2\overrightarrow{B}^2$.

<u>Exercice 04 :</u> (08 pts)

Un référentiel (R') : $O'x'y'z'$ est animé, par rapport à un référentiel (R) : $Oxyz$ d'un mouvement de translation uniforme de vitesse $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\beta}\, c$ dans la direction Ox. A l'origine des temps, les origines O et O' coïncident et les axes $O'y'$ et $O'z'$ sont respectivement parallèles aux axes Oy et Oz. Dans (R), les composantes d'un champ électromagnétique uniforme sont:

$$\overrightarrow{E} \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0 \sin\alpha \\ E_z = E_0 \cos\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{E_0}{c} \end{cases}$$

avec $0 < \alpha < \pi/2$.

1) Donner les composantes des champs $\overrightarrow{E'}$ et $\overrightarrow{B'}$ dans (R').

2) a) Trouver la relation entre $\beta = \frac{v}{c}$ et le paramètre angulaire α pour que les champs électrique et magnétique ont même direction dans (R'). b) En déduire que $\beta = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

c) Est-ce qu'on peut avoir $\overrightarrow{E'}$ // $\overrightarrow{B'}$ si $\alpha = \pi/2$.

d) On désigne par α' l'angle entre la direction de $\overrightarrow{E'}$ où ($\overrightarrow{B'}$) et la direction de $\overrightarrow{B}$. Etablir une relation simple liant α' et α.

Correction

Exercice 01 : (4 pts)

$$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}$$

où L^{μ}_{α} est la matrice de Lorentz.

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L^{\mu}{}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Formules de transformation des champs électrique et magnétique:

$$F'^{01} = L^{0}{}_{\alpha} L^{1}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{E'_x}{c} = L^{0}{}_{0} L^{1}{}_{\beta} F^{0\beta} + L^{0}{}_{1} L^{1}{}_{\beta} F^{1\beta} = L^{0}{}_{0} L^{1}{}_{1} F^{01} + L^{0}{}_{1} L^{1}{}_{0} F^{10}$$

$$\Rightarrow -\frac{E'_x}{c} = \gamma^2 \left(-\frac{E_x}{c}\right) - \gamma\beta\left(-\gamma\beta\right)\frac{E_x}{c}$$

$$\Rightarrow E'_x = E_x \gamma^2 \left(1-\beta^2\right), \quad \text{mais} \quad \gamma^2\left(1-\beta^2\right) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{E'_x = E_x}$$

$$F'^{02} = L^{0}{}_{\alpha} L^{2}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{E'_y}{c} = L^{0}{}_{0} L^{2}{}_{\beta} F^{0\beta} + L^{0}{}_{1} L^{2}{}_{\beta} F^{1\beta} = L^{0}{}_{0} L^{2}{}_{2} F^{02} + L^{0}{}_{1} L^{2}{}_{2} F^{12}$$

$$\Rightarrow -\frac{E'_y}{c} = \gamma\left(-\frac{E_y}{c}\right) + \left(-\gamma\beta\right)\left(-B_z\right) \Rightarrow \boxed{E'_y = \gamma\left(E_y - \beta c B_z\right)}$$

$$F'^{03} = L^{0}{}_{\alpha} L^{3}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} = L^{0}{}_{\alpha} L^{3}{}_{3} F^{\alpha 3} = L^{0}{}_{0} F^{03} + L^{0}{}_{1} F^{13} \Rightarrow -\frac{E'_z}{c} = \gamma \left(-\frac{E_z}{c}\right) - \gamma\beta\left(B_y\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E'_z = \gamma\left(E_z + \beta c B_y\right)}$$

$$F'^{12} = L^{1}{}_{\alpha} L^{2}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} = L^{1}{}_{\alpha} L^{2}{}_{2} F^{\alpha 2} = L^{1}{}_{0} F^{02} + L^{1}{}_{1} F^{12} \Rightarrow -B'_z = \left(-\gamma\beta\right)\left(-\frac{E_y}{c}\right) + \gamma\left(-B_z\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B'_z = \gamma\left(B_z - \tfrac{\beta}{c} E_y\right)}$$

$$F'^{13} = L^1{}_\alpha L^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = L^1{}_\alpha L^3{}_3 F^{\alpha 3} = L^1{}_0 F^{03} + L^1{}_1 F^{13} \Rightarrow B'_y = -\gamma\beta\left(-\frac{E_z}{c}\right) + \gamma\left(B_y\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{B'_y = \gamma\left(B_y + \tfrac{\beta}{c}E_z\right)}$$

$$F'^{23} = L^2{}_\alpha L^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = L^2{}_2 L^3{}_3 F^{23} = F^{23} \Rightarrow \boxed{B'_x = B_x}$$

<u>Exercice 02 :</u> (5 pts)

$$\gamma + p \longrightarrow n + \pi^+$$

1) Relation entre E_γ et E^* :

Le 4-vecterur énergie-impulsion du système $(\gamma + p)$:

$$\text{dans } (R) : \begin{pmatrix} \frac{E_\gamma + m_p c^2}{c} \\ \overrightarrow{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \text{dans } (R') : \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}$$

L'invariance du carré des quadrivecteurs donne:

$$\frac{\left(E_\gamma + m_p c^2\right)^2}{c^2} - p_\gamma^2 = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{\left(E_\gamma + m_p c^2\right)^2}{c^2} - \frac{E_\gamma^2}{c^2} = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(E_\gamma + m_p c^2\right)^2 - E_\gamma^2 = E^{*2}$$

$$\Rightarrow E_\gamma^2 + 2m_p c^2 E_\gamma + m_p^2 c^4 - E_\gamma^2 = E^{*2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^* = \sqrt{m_p c^2\left(2E_\gamma + m_p c^2\right)}}$$

2) Cette relation ne peut avoir lieu que si:

$$E^* \geq \text{(les énergies de masse des particules formées)}$$

c'est-à-dire:

$$E^* \geq \left(m_n c^2 + m_\pi c^2\right) \Rightarrow m_p c^2\left(2E_\gamma + m_p c^2\right) \geq \left(m_n + m_\pi\right)^2 c^4$$

$$\Rightarrow 2m_p E_\gamma \geq \left(m_n + m_\pi\right)^2 c^2 - m_p^2 c^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma \geq \frac{\left[\left(m_n + m_\pi\right)^2 - m_p^2\right]}{2m_p} c^2$$

$$\text{donc} \quad \boxed{E_0 = \frac{\left[\left(m_n + m_\pi\right)^2 - m_p^2\right]}{2m_p} c^2}$$

AN:

$$E_0=\frac{\left(m_nc^2+m_\pi c^2\right)^2-\left(m_pc^2\right)^2}{2m_pc^2}=\frac{(939,55+139,6)^2-(938,25)^2}{2\,(938,25)}$$

$$\boxed{E_0=151,48\ \text{MeV}}$$

<u>Exercice 03 :</u> (03 pts)

Soient les formules de transformation de Lorentz des champs électromagnétiques:

$$\begin{cases} E_x=E'_x \\ E_y=\gamma\left(E'_y+\beta cB'_z\right) \\ E_z=\gamma\left(E'_z-\beta cB'_y\right)\end{cases}\quad,\quad\begin{cases} B_x=B'_x \\ B_y=\gamma\left(B'_y-\frac{\beta}{c}E'_z\right) \\ B_z=\gamma\left(B'_z+\frac{\beta}{c}E'_y\right)\end{cases}\quad.\quad,$$

$$\begin{aligned}\vec{E}.\vec{B}&=\left(E_xB_x+E_yB_y+E_zB_z\right)=E'_xB'_x+\gamma\left(E'_y+\beta cB'_z\right)\gamma\left(B'_y-\frac{\beta}{c}E'_z\right)\\&+\gamma\left(E'_z-\beta cB'_y\right)\gamma\left(B'_z+\frac{\beta}{c}E'_y\right)\\&=E'_xB'_x+\gamma^2\left[E'_yB'_y-\frac{\beta}{c}E'_yE'_z+\beta cB'_zB'_y-\beta^2B'_zE'_z+E'_zB'_z+\frac{\beta}{c}E'_zE'_y-\beta cB'_yB'_z-\beta^2B'_yE'_y\right]\\&=E'_xB'_x+\gamma^2\left[E'_yB'_y+E'_zB'_z-\beta^2E'_yB'_y-\beta^2E'_zB'_z\right]\\&=E'_xB'_x+\gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left(E'_yB'_y+E'_zB'_z\right),\ \text{mais}\ \ \gamma^2\left(1-\beta^2\right)=1\end{aligned}$$

Alors : $\vec{E}.\vec{B}=E'_xB'_x+E'_yB'_y+E'_zB'_z=\vec{E'}.\vec{B'}$

$\Rightarrow$ le produit $\vec{E}.\vec{B}$ est un invariant relativiste.

de même:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{E}^2 - c^2\overrightarrow{B}^2 &= \left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) - c^2\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) \\
&= E_x'^2 - c^2 B_x'^2 + \gamma^2\left(E_y' + \beta c B_z'\right)^2 + \gamma^2\left(E_z' - \beta c B_y'\right)^2 \\
&- c^2\gamma^2\left(B_y' - \frac{\beta}{c}E_z'\right)^2 - c^2\gamma^2\left(B_z' + \frac{\beta}{c}E_y'\right)^2 \\
&= E_x'^2 - c^2 B_x'^2 + \gamma^2\left(E_y'^2 + \beta^2c^2B_z'^2 + 2E_y'\beta c B_z'\right) + \gamma^2\left(E_z'^2 + \beta^2 c^2 B_y'^2 - 2E_z'\beta c B_y'\right) \\
&- c^2\gamma^2\left(B_y'^2 + \frac{\beta^2}{c^2}E_z'^2 - 2B_y'\frac{\beta}{c}E_z'\right) - c^2\gamma^2\left(B_z'^2 + \frac{\beta^2}{c^2}E_y'^2 + 2B_z'\frac{\beta}{c}E_y'\right) \\
&= E_x'^2 - c^2B_x'^2 + \gamma^2E_y'^2 + \gamma^2\beta^2c^2B_z'^2 + 2\beta c\gamma^2E_y'B_z' - 2\beta c\gamma^2E_z'B_y' + 2\beta c\gamma^2 B_y'E_z' \\
&- 2\beta c\gamma^2 B_z'E_y' + \gamma^2E_z'^2 + \gamma^2\beta^2c^2B_y'^2 - c^2\gamma^2B_y'^2 - \gamma^2\beta^2E_z'^2 - c^2\gamma^2B_z'^2 - \gamma^2\beta^2E_y'^2 \\
&= E_x'^2 + \gamma^2\left(1-\beta^2\right)E_y'^2 + \gamma^2\left(1-\beta^2\right)E_z'^2 - c^2\left[B_x'^2 + \gamma^2\left(1-\beta^2\right)B_y'^2 + \gamma^2\left(1-\beta^2\right)B_z'^2\right] \\
&= E_x'^2 + E_y'^2 + E_z'^2 - c^2\left[B_x'^2 + B_y'^2 + B_z'^2\right] = \overrightarrow{E'}^2 - c^2\overrightarrow{B'}^2 \\
&\Rightarrow \overrightarrow{E'}^2 - c^2\overrightarrow{B'}^2 \ \text{ est un invariant relativiste.}
\end{aligned}
$$

<u>Exercice 04 :</u> (08 pts)

1) Les composantes des champs $\overrightarrow{E'}$ et $\overrightarrow{B'}$ dans (R').

$$
\begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \gamma\left(E_y - \beta c B_z\right) \\ E_z' = \gamma\left(E_z + \beta c B_y\right) \end{cases} , \quad \begin{cases} B_x' = B_x \\ B_y' = \gamma\left(B_y + \frac{\beta}{c}E_z\right) \\ B_z' = \gamma\left(B_z - \frac{\beta}{c}E_y\right) \end{cases} . \quad ,
$$

dans notre cas:

$$
\begin{cases} E_x' = 0 \\ E_y' = \gamma\left(\sin\alpha - \beta\right)E_0 \\ E_z' = \gamma E_0\cos\alpha \end{cases} , \quad \begin{cases} B_x' = 0 \\ B_y' = \frac{\gamma\beta}{c}E_0\cos\alpha \\ B_z' = \frac{\gamma}{c}\left(1 - \beta\sin\alpha\right)E_0 \end{cases} . \quad ,
$$

2) a) Relation entre β et α :

$$
\overrightarrow{E'}//\overrightarrow{B'} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E'}\wedge\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \overrightarrow{i'} & \overrightarrow{j'} & \overrightarrow{k'} \\ 0 & \gamma\left(\sin\alpha-\beta\right)E_0 & \gamma E_0\cos\alpha \\ 0 & \frac{\gamma\beta}{c}E_0\cos\alpha & \frac{\gamma}{c}\left(1-\beta\sin\alpha\right)E_0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\gamma^2}{c}\left(\sin\alpha - \beta\right)\left(1 - \beta\sin\alpha\right)E_0^2 - \frac{\gamma^2\beta}{c}E_0^2\cos^2\alpha \quad = 0 \\
&\Rightarrow \left(\sin\alpha - \beta\right)\left(1-\beta\sin\alpha\right) - \beta\cos^2\alpha \quad = 0 \\
&\Rightarrow \boxed{\sin\alpha\beta^2 - 2\beta + \sin\alpha = 0}
\end{aligned}
$$

b) $\Delta' = 1 - \sin^2 \alpha > 0$; puisque $\sin \alpha < 1$.

$$\beta = \frac{1-\sqrt{\Delta'}}{\sin\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \boxed{\beta = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$\beta = \frac{1+\sqrt{\Delta'}}{\sin\alpha} > 1$ (exclue).

c) si $\alpha = \pi/2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} E'_x = 0 \\ E'_y = \gamma\,(1-\beta)\,E_0 \\ E'_z = 0 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} B'_x = 0 \\ B'_y = 0 \\ B'_z = \frac{\gamma}{c}\,(1-\beta)\,E_0 \end{cases} \quad . \quad ,$$

$$\overrightarrow{E'}//\overrightarrow{B'} \Rightarrow \overrightarrow{E'} \wedge \overrightarrow{B'} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \gamma^2\left(1-\beta^2\right)E_0^2 = 0 \Rightarrow E_0 = 0$$

mais $E_0 \neq 0$ si non le problème sera trivial, alors pour $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \overrightarrow{E'} \wedge \overrightarrow{B'} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{E'}$ n'est pas parallèle à $\overrightarrow{B'}$.

d) Soit $\overrightarrow{E'}$ // $\overrightarrow{B'}$ et $\overrightarrow{B}$ est suivant Oz

$$\Rightarrow \tan\alpha' = \frac{E'_y}{E'_z} = \frac{\sin\alpha - \beta}{\cos\alpha} \quad \text{mais} \quad \beta = \tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{alors: } \tan\alpha' = \frac{\sin\alpha - \tan\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

mais: $\sin\alpha = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$, $\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ donc:

$$\tan\alpha' = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$
$$= \frac{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\alpha = 2\alpha'}$$