Université de Jijel-Faculté SEI-Département de Physique

3ème Licence Physique Fondamentale (2016/2017)

Module: Relativité restreinte.

Durée: 2h

Examen

Exercice 01 : (05 pts)

Une particule de masse m_1 et de vitesse $\overrightarrow{v}$ suivant l'axe des x entre en choc parfaitement mou avec une autre particule au repos de masse m_2, pour former une particule de masse M de vitesse $\overrightarrow{v}'$ suivant l'axe des x.

1) On suppose que la 4-impulsion du système est une quantité conservée, donner l'expression de la masse M en fonction de m_1, m_2 et γ_{p_1} où $\gamma_{p_1} = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

2) Comparer la masse M et la somme m_1+ m_2. Que peut-on déduire ?

Exercice 02 : (05 pts)

On réalise dans le référentiel du laboratoire ($\mathcal{R}$) une collision entre un photon d'énergie E_1 et d'impulsion $\overrightarrow{p}$ suivant l'axe des x et un électron de masse $m = 0,5$ Mev/c^2 au repos:

$$\gamma + e^- \rightarrow \left(e^+ + e^-\right) + e^-$$

collision engendrant un positron (même masse que l'électron avec une charge positive) et deux électrons.

1) Donner l'énergie totale E^* du système $(\gamma + e^-)$ dans le référentiel du centre de masse ($\mathcal{R}^*$) en fonction de l'énergie E_1 dans ($\mathcal{R}$) du photon incident et la masse m de l'électron.

2) Montrer que cette réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie du photon E_1 est supérieure à une valeur limite E_0 que l'on déterminera. Faire l'application numérique.

Exercice 03 : (04 pts)

Soit le tenseur du champ électromagnétique:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

Développer l'expression $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ en termes de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.

Exercice 04 : (06 pts)

L'action relativiste relative à une particule libre est donnée par l'expression:

$$\mathcal{A} = \alpha \int_a^b ds$$

où a et b sont les positions initiale et finale de la particule aux instants respectifs t_1 et t_2.

1) Que doit être cette action par un changement de référentiel galiléen ?

2) Trouver la valeur de la constante α en considérant la limite non relativiste.

3) En minimisant cette action, montrer qu'on obtient l'équation de mouvement de la particule libre:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$$

où $p_\mu = mv_\mu$.

.

Corrigé de l'Examen

Exercice 01 :

On applique la conservation de la quadri-quantité de mouvement avant et aprés le choc:

$$\left(\underline{p}\right)_1 + \left(\underline{p}\right)_2 = \left(\underline{p}\right)'_3 \quad .... \text{ (a)}$$

Avant le choc:

$$\left(\underline{p}\right)_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{p_1} m_1 c \\ \gamma_{p_1} m_1 \upsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \left(\underline{p}\right)_2 = \begin{pmatrix} m_2 c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Aprés le choc:

$$\left(\underline{p}\right)'_3 = \begin{pmatrix} \gamma_{p_3} M c \\ \gamma_{p_3} M \upsilon' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{p_1} m_1 c + m_2 c \\ \gamma_{p_1} m_1 \upsilon \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{p_3} M c \\ \gamma_{p_3} M \upsilon' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui donne

$$\gamma_{p_1} m_1 + m_2 = \gamma_{p_3} M$$
$$\gamma_{p_1} m_1 \beta = \gamma_{p_3} M \beta',$$

avec $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$ et $\beta' = \dfrac{\upsilon'}{c}$. Prenons le carré puis faisons la différence:

$$\left[\gamma_{p_1} m_1 + m_2\right]^2 - \gamma_{p_1}^2 m_1^2 \beta^2 = \gamma_{p_3}^2 M^2 - \gamma_{p_3}^2 M^2 \beta^{2\prime}$$
$$\Rightarrow \gamma_{p_1}^2 m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_{p_1} m_1 m_2 - \gamma_{p_1}^2 m_1^2 \beta^2 = \left(1 - \beta^{2\prime}\right) \gamma_{p_3}^2 M^2$$
$$\Rightarrow \left[1 - \beta^2\right] \gamma_{p_1}^2 m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_{p_1} m_1 m_2 = \left(1 - \beta^{2\prime}\right) \gamma_{p_3}^2 M^2$$

comme $(1-\beta^{2\prime})\,\gamma_{p_3}^2 = 1$ et $\left[1-\beta^2\right]\gamma_{p_1}^2 = 1$, on obtient:

$$\boxed{M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_{p_1} m_1 m_2}}$$

2)

$$\begin{aligned}
\text{comme } \gamma_{p_1} > 1 &\Rightarrow 2\gamma_{p_1} m_1 m_2 > 2m_1 m_2 \Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_{p_1} m_1 m_2 > m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \\
&\Rightarrow m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_{p_1} m_1 m_2 > (m_1+m_2)^2 \Rightarrow \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2\gamma_{p_1} m_1 m_2} > m_1 + m_2 \\
&\Rightarrow \boxed{M > m_1 + m_2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Une partie d'énergie cinétique s'est transformée en énergie de masse.

<u>Exercice 02 :</u>

$$\gamma + e^- \to \left(e^+ + e^-\right) + e^-$$

1) Ecrivons le 4-vecteur énergie-impulsion du système $(\gamma + e^-)$:

$$\text{dans } (\mathcal{R}) : \begin{pmatrix} \frac{E_1 + mc^2}{c} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix}, \qquad \text{dans } (\mathcal{R}^*) : \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}$$

L'invariance du carré du 4-vecteur énergie-impulsion du système $(\gamma + e^-)$ donne:

$$\frac{\left(E_1 + mc^2\right)^2}{c^2} - \overrightarrow{p}^2 = \frac{\left(E^*\right)^2}{c^2} \quad \ldots (1)$$

mais pour le photon (particule de masse nulle): $E_1 = pc \Rightarrow p = E_1/c$ ....(2)

remplaçons (2) dans (1), on obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\left(E_1 + mc^2\right)^2}{c^2} - \frac{E_1^2}{c^2} = \frac{\left(E^*\right)^2}{c^2} &\Rightarrow 2E_1 mc^2 + m^2c^4 = \left(E^*\right)^2 \\
&\Rightarrow \boxed{E^* = \sqrt{mc^2\left(2E_1 + mc^2\right)} \quad \ldots. \ (3)}
\end{aligned}$$

2) La réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie disponible E^* dans $(\mathcal{R}^*)$ est supérieure ou égale à l'énergie au repos des 3 particules e^+, e^- et e^- obtenues; c'est-à-dire: $E^* \geqslant 3mc^2$ soit d'aprés (3):

$$\begin{aligned}
mc^2\left(2E_1 + mc^2\right) &\geqslant 9m^2c^4 \\
&\Rightarrow E_1 \geqslant 4mc^2
\end{aligned}$$

Le seuil énergitique du faisceau de photons est donc: $\boxed{E_0 = 4mc^2}$

AN: $E_0 = 4\,(0,5) = 2$ Mev.

Exercice 03 :

Soit le tenseur du champ électromagnétique:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

On a vu en cours que:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

Puisque $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique, on calcule seulement les éléments au-dessus de la diagonale:

$$\begin{aligned} F_{01} &= g_{0\alpha} g_{1\beta} F^{\alpha\beta} = g_{00} g_{11} F^{01} = -F^{01}, \qquad & F_{12} &= g_{1\alpha} g_{2\beta} F^{\alpha\beta} = g_{11} g_{22} F^{12} = F^{12} \\ F_{02} &= g_{0\alpha} g_{2\beta} F^{\alpha\beta} = g_{00} g_{22} F^{02} = -F^{02}, \qquad & F_{13} &= g_{1\alpha} g_{3\beta} F^{\alpha\beta} = g_{11} g_{33} F^{13} = F^{13} \\ F_{03} &= g_{0\alpha} g_{3\beta} F^{\alpha\beta} = g_{00} g_{33} F^{03} = -F^{03}, \qquad & F_{23} &= g_{2\alpha} g_{3\beta} F^{\alpha\beta} = g_{22} g_{33} F^{23} = F^{23} \end{aligned}$$

Alors,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

Développons maintenant l'expression $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = F^{0\nu} F_{0\nu} + F^{1\nu} F_{1\nu} + F^{2\nu} F_{2\nu} + F^{3\nu} F_{3\nu}$$

On a le premier terme,

$$\begin{aligned} F^{0\nu} F_{0\nu} = F^{0i} F_{0i} &= -\left(F^{01}\right)^2 - \left(F^{02}\right)^2 - \left(F^{03}\right)^2 \\ &= -\frac{E_x^2}{c^2} - \frac{E_y^2}{c^2} - \frac{E_z^2}{c^2} = -\frac{\overrightarrow{E}^2}{c^2}. \end{aligned}$$

le deuxième,

$$\begin{aligned} F^{1\nu} F_{1\nu} &= F^{10} F_{10} + F^{12} F_{12} + F^{13} F_{13} \\ &= -\left(F^{10}\right)^2 + \left(F^{12}\right)^2 + \left(F^{13}\right)^2 \\ &= -\frac{E_x^2}{c^2} + B_z^2 + B_y^2 \end{aligned}$$

le troisième,

$$
\begin{aligned}
F^{2\nu}F_{2\nu} &= F^{20}F_{20} + F^{21}F_{21} + F^{23}F_{23} \\
&= -\left(F^{20}\right)^2 + \left(F^{12}\right)^2 + \left(F^{23}\right)^2, \qquad \text{puisque} \quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{\nu\mu}F_{\nu\mu} \\
&= -\frac{E_y^2}{c^2} + B_z^2 + B_x^2
\end{aligned}
$$

le dernier terme,

$$
\begin{aligned}
F^{3\nu}F_{3\nu} &= F^{30}F_{30} + F^{31}F_{31} + F^{32}F_{32} \\
&= -\left(F^{30}\right)^2 + \left(F^{13}\right)^2 + \left(F^{23}\right)^2 \\
&= -\frac{E_z^2}{c^2} + B_y^2 + B_x^2
\end{aligned}
$$

il vient:

$$
\begin{aligned}
F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{\overrightarrow{E}^2}{c^2} - \frac{E_x^2}{c^2} + B_z^2 + B_y^2 - \frac{E_y^2}{c^2} + B_z^2 + B_x^2 - \frac{E_z^2}{c^2} + B_y^2 + B_x^2 \\
\Leftrightarrow F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= -\frac{\overrightarrow{E}^2}{c^2} - \frac{1}{c^2}\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) + 2\left(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2\right) \\
\Leftrightarrow & \boxed{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(\overrightarrow{B}^2 - \frac{\overrightarrow{E}^2}{c^2}\right)}
\end{aligned}
$$

La quantité $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est un scalaire de Lorentz.

Exercice 04 :

L'action relativiste relative à une particule libre est donnée par l'expression:

$$
\mathcal{A} = \alpha \int_a^b ds
$$

où a et b sont les positions initiale et finale de la particule aux instants respectifs t_1 et t_2.

1) L'action doit être **invariante** par changement de référentiel galiléen.

2) Puisque $ds = cd\tau$ on a:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \alpha \int_a^b cd\tau = \alpha \int_a^b c\frac{dt}{\gamma}, \quad \text{puisque} \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma} \\
\mathcal{A} &= \int_a^b \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt, \qquad \text{puisque} \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
\mathcal{A} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}dt,
\end{aligned}
$$

tel que le lagrangien $\mathcal{L}$ est:

$$
\mathcal{L} = \alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}
$$

Aux faibles vitesses (limite non relativiste), on doit retrouver le lagrangien de la mécanique newtonienne:

$$\mathcal{L} = \alpha c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq \alpha c - \frac{v^2\alpha}{2c}.$$

Pour que le terme en v^2 coïncide avec l'énergie cinétique, il faut que $\boxed{\alpha = -mc.}$

Ainsi, l'action s'écrit:

$$\mathcal{A} = -mc\int_b^a ds$$

3) En minimisant cette action, on a:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} =& -mc\int_b^a \delta ds \\
&= -mc\int_a^b \delta\sqrt{dx_\mu dx^\mu}, \quad \text{puisque } \; ds = \sqrt{dx_\mu dx^\mu}. \\
&= -mc\int_a^b \frac{1}{2}\left(dx_\mu dx^\mu\right)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\left[\delta\left(dx_\mu\right)dx^\mu + dx_\mu\delta\left(dx^\mu\right)\right]}_{=2\delta(dx_\mu)dx^\mu} \\
&= -mc\int_a^b \frac{dx^\mu}{ds}\delta\left(dx_\mu\right) = -mc\int_a^b \frac{1}{c}v^\mu\delta\left(dx_\mu\right) \quad \text{, puisque } ds = cd\tau \\
\delta\mathcal{A} &= -m\int_a^b v^\mu\delta\left(dx_\mu\right)
\end{aligned}$$

On a de plus $\delta\left(dx_\mu\right) = d\left(\delta x_\mu\right)$, soit:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} &= -m\int_a^b v^\mu d\left(\delta x_\mu\right) \\
&= -m\left[v^\mu\left(\delta x_\mu\right)\right]_a^b + m\int_a^b dv^\mu\delta x_\mu \quad , \quad \text{par IPP}
\end{aligned}$$

Ici, a et b repèrent les coordonnées d'espace-temps de deux événements entre lesquels on minimise l'action. Ainsi, les termes intégrés disparaissent car les variations δx_μ sont nulles aux extrémités de la ligne d'univers; $\delta x_\mu(a) = \delta x_\mu(b) = 0$.

Soit:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{A} = \int_a^b m dv^\mu\delta x_\mu &= \int_a^b \left(m\frac{dv^\mu}{d\tau}\right)d\tau\delta x_\mu \\
&= \int_a^b \left(\frac{dmv^\mu}{d\tau}\right)d\tau\delta x_\mu
\end{aligned}$$

d'où l'équations du mouvement de la particule libre est telle que

$$\delta\mathcal{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0} \quad \text{où} \quad p_\mu = mv_\mu.$$