Université de Jijel-Faculté SEI-Département de Physique

$\mathbf{3}^{ème}$ Licence Physique Fondamentale (2017/2018)

Module: Relativité restreinte.

Durée : 1h 45mn

Examen

Exercice 01 : (04 pts)

Soit un référentiel $(\mathcal{R}')$ en translation uniforme par rapport à un référentiel fixe $(\mathcal{R})$ avec une vitesse $\overrightarrow{V}$ selon le sens positif de l'axe x. Soit $v_x = dx/dt$ la composante de la vitesse d'une particule matérielle dans $(\mathcal{R})$ et $v'_x = dx'/dt'$ sa composante dans $(\mathcal{R}')$. On considére la transformation de Lorentz:

$$\begin{cases} x' = \gamma\,(x - Vt) \\ ct' = \gamma\left(ct - \frac{V}{c}x\right), \end{cases}$$

1) Déterminer la vitesse v'_x en fonction de v_x ,V et c.

2) Deux vaisseaux spatiaux A et B se déplacent à droite et à gauche avec des vitesses de $0,8c$ et $0,6c$ respectivement observées par un observateur sur terre. Quelle est la vitesse du vaisseaux A par rapport à B dans le cadre de la théorie de la relativité d'Einstein ?

Exercice 02 : (03 pts)

Un proton de masse $m = 938\ MeV/c^2$ possède une quantité de mouvement de module $p = 3\ GeV/c$. Calculer:

a) l'énergie E de ce proton. b) le module v de sa vitesse. c) son énergie cinétique.

Exercice 03 : (04 pts)

On réalise dans le référentiel du laboratoire $(\mathcal{R})$ une collision entre un photon d'énergie E_1 et d'impulsion $\overrightarrow{p}$ suivant l'axe des x et un électron de masse $m = 0,5$ Mev/c^2 au repos suivant le processus:

$$\gamma + e^- \rightarrow \left(e^+ + e^-\right) + e^-$$

Question: Montrer que cette réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie du photon E_1 est supérieure à une valeur limite E_0 que l'on déterminera. Faire l'application numérique.

Exercice 04 : (04 pts)

Soit le tenseur du champ électromagnétique:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} a & -\frac{E}{c} & 0 & 0 \\ b & a & -B & 0 \\ 0 & c & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

1) Déterminer les valeurs a , b et c.

2) Développer l'expression $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ en termes de E et B.

Exercice 05 : (05 pts)

L'action d'une particule de charge q et de masse m soumise à un champ électromagnétique entre deux évènements d'espace-temps a et b est donnée par l'expression:

$$\mathcal{A} = \int_a^b (-\alpha ds - qA_\mu dx^\mu)$$

où α est une constante.

1) a) Vérifier que cette action s'écrit aussi comme:

$$\mathcal{A} = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt$$

où $\mathcal{L}$ est un Lagrangien à déterminer.

b) Trouver la valeur de la constante α en considérant la limite non relativiste.

2) a) Donner les composantes de l'impulsion généralisée $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ en calculant les dérivées suivantes:

$$\mathcal{P}_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \upsilon_x}, \quad \mathcal{P}_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \upsilon_y}, \quad \mathcal{P}_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \upsilon_z}$$

b) En calculant l'expression $E = \overrightarrow{\upsilon}.\overrightarrow{\mathcal{P}} - \mathcal{L}$, montrer que l'énergie totale de la particule E est :

$$E = \gamma mc^2 + q\phi$$

N. Ferkous

.

Corrigé de l'Examen

Exercice 01 :

1)

$$dx' = \gamma\left(dx - V\,dt\right)\ , \qquad (a)$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2}dx\right)\ , \qquad (b)$$

$$\frac{(a)}{(b)} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{dt - \frac{V}{c^2}dx} \Rightarrow \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}\upsilon_x} \qquad (c)}$$

2) On suppose que le vaisseau A se déplace à droite de l'observateur sur terre placé en O, origine des coordonées dans $(\mathcal{R})$, et le vaisseau B à gauche. On considére donc que:

$$\upsilon_x = \upsilon_{A/O} \quad \text{et} \quad V = \upsilon_{B/O} \quad \text{ainsi } \upsilon'_x = \upsilon_{A/B}$$

Alors d'aprés (c), on a:

$$\upsilon_{A/B} = \frac{\upsilon_{A/O} - \upsilon_{B/O}}{1 - \frac{\upsilon_{B/O}}{c^2}\upsilon_{A/O}}$$

avec: $\upsilon_{A/O} = -0,8c$, $\upsilon_{B/O} = 0,6c$ (en respectant le sens positif):

$$\upsilon_{A/B} = \frac{-0,8c - 0,6c}{1 - \frac{0,6c}{c^2}\left(-0,8c\right)} = \frac{-1,4c}{1 + 0.48} \simeq -0.95c$$

Exercice 02 :

Un proton de masse $m = 938\ MeV/c^2$ possède une quantité de mouvement de module $p = 3\ GeV/c$.

a) L'énergie de ce proton est:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \Rightarrow E = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + \left(pc\right)^2}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\left(0,938\right)^2 + \left(3\right)^2} = 3,14GeV$$

b) Le module de sa vitesse υ:

$$p = \gamma m\upsilon \Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}m\upsilon$$

$$\Rightarrow p^2\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) = m^2\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon = \frac{pc}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}} = \frac{3}{\sqrt{\left(0,938\right)^2\ + 9}}c$$

$$\Rightarrow \upsilon = 0,95\ c$$

c) Son énergie cinétique T:

$$E = mc^2 + T \Rightarrow T = E - mc^2 \Rightarrow T = 2,\, 202\ GeV$$

Exercice 03 :

$$\gamma + e^- \rightarrow \left(e^+ + e^-\right) + e^-$$

Ecrivons le 4-vecteur énergie-impulsion du système $(\gamma + e^-)$:

$$\text{dans} \quad (\mathcal{R}) : \begin{pmatrix} \frac{E_1+mc^2}{c} \\ \overrightarrow{p} \end{pmatrix}, \qquad \text{dans} \quad (\mathcal{R}^*) : \begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}$$

L'invariance du carré du 4-vecteur énergie-impulsion du système $(\gamma + e^-)$ donne:

$$\frac{\left(E_1 + mc^2\right)^2}{c^2} - \overrightarrow{p}^2 = \frac{\left(E^*\right)^2}{c^2} \quad ...\ (1)$$

mais pour le photon (particule de masse nulle): $E_1 = pc \Rightarrow p = E_1/c$ ....(2)

remplaçons (2) dans (1), on obtient:

$$\frac{\left(E_1 + mc^2\right)^2}{c^2} - \frac{E_1^2}{c^2} = \frac{\left(E^*\right)^2}{c^2} \Rightarrow 2E_1 mc^2 + m^2c^4 = \left(E^*\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{E^* = \sqrt{mc^2\left(2E_1 + mc^2\right)} \ \ .... \ (3)}$$

La réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie disponible E^* dans $(\mathcal{R}^*)$ est supérieure ou égale à l'énergie au repos des 3 particules e^+, e^- et e^- obtenues; c'est-à-dire: $E^* \geqslant 3mc^2$ soit d'aprés (3):

$$mc^2\left(2E_1 + mc^2\right) \geqslant 9m^2c^4$$

$$\Rightarrow E_1 \geqslant 4mc^2$$

Le seuil énergitique du faisceau de photons est donc: $\boxed{E_0 = 4mc^2}$

AN: $E_0 = 4\,(0,5) = 2$ Mev.

Exercice 04 : (04 pts)

1) $F^{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique $\Rightarrow a = 0,\ b = \frac{E}{c}$et $c = B$.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E}{c} & 0 & 0 \\ \frac{E}{c} & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2) Développement de l'expression $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ en termes de E et B :

On a vu en cours que:

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}F^{\alpha\beta}$$

Puisque $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique, on calcule seulement les éléments non nuls au-dessus de la diagonale:

$$F_{01} = g_{0\alpha}g_{1\beta}F^{\alpha\beta} = g_{00}g_{11}F^{01} = -F^{01},$$
$$F_{12} = g_{1\alpha}g_{2\beta}F^{\alpha\beta} = g_{11}g_{22}F^{12} = F^{12}$$

Alors,

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{c} & 0 & 0 \\ -\frac{E}{c} & 0 & -B & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Développons maintenant l'expression $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = F^{0\nu}F_{0\nu} + F^{1\nu}F_{1\nu} + F^{2\nu}F_{2\nu} + F^{3\nu}F_{3\nu}$$

On a le premier terme,

$$F^{0\nu}F_{0\nu} = F^{01}F_{01} = -\left(F^{01}\right)^2 = -\frac{E^2}{c^2}.$$

le deuxième,

$$F^{1\nu}F_{1\nu} = F^{10}F_{10} + F^{12}F_{12} = -\left(F^{10}\right)^2 + \left(F^{12}\right)^2 = -\frac{E^2}{c^2} + B^2$$

le troisième,

$$F^{2\nu}F_{2\nu} = F^{21}F_{21} = \left(F^{21}\right)^2 = B^2$$

le dernier terme,

$$F^{3\nu}F_{3\nu} = 0$$

il vient:

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{E^2}{c^2} - \frac{E^2}{c^2} + B^2 + B^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2\left(B^2 - \frac{E^2}{c^2}\right)}$$

La quantité $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ est un scalaire de Lorentz.

<u>Exercice 05 :</u>

1) a) On a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_a^b \left(-\alpha ds - qA_\mu dx^\mu\right) = \int_a^b \left(-\alpha c d\tau - q\left(A_0 dx^0 + A_i dx^i\right)\right), \quad \text{puisque } ds = cd\tau \\
&= \int_a^b \left(-\alpha c\frac{dt}{\gamma} - q\left(c\frac{\phi}{c}dt - \overrightarrow{A}.d\overrightarrow{r}\right)\right), \quad \text{puisque } d\tau = \frac{dt}{\gamma} \ \text{ et } A_0 = \frac{\phi}{c} \\
&= \int_{t_b}^{t_a} \left(-\alpha c\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\overrightarrow{A}.\overrightarrow{v}\right) dt, \\
&= \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt \ \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} = -\alpha c\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} + q\overrightarrow{A}.\overrightarrow{v} - q\phi}
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ est le Lagrangien du système.

b) Aux faibles vitesses (limite non relativiste), on doit retrouver le lagrangien de la mécanique newtonienne:

$$\mathcal{L} = -\alpha c\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} + q\overrightarrow{A}.\overrightarrow{v} - q\phi \simeq -\alpha c + \frac{v^2\alpha}{2c} + q\overrightarrow{A}.\overrightarrow{v} - q\phi$$

Pour que le terme en v^2 coïncide avec l'énergie cinétique, il faut que $\boxed{\alpha = mc.}$

Ainsi, le Lagrangien s'écrit:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} + q\overrightarrow{A}.\overrightarrow{v} - q\phi$$

2) a) les composantes de l'impulsion généralisée $\overrightarrow{\mathcal{P}}$:

Le lagrangien précédent s'écrit aussi comme:

$$\mathcal{L} = -mc^2\sqrt{1-\tfrac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}} + q\left(A_x v_x + A_y v_y + A_z v_z\right) - q\phi$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = \frac{m v_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_x \\
\mathcal{P}_y &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} = \frac{m v_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_y \\
\mathcal{P}_z &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = \frac{m v_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + qA_z
\end{aligned}$$

b) L'énergie totale de la particule E est:

$$
\begin{aligned}
E &= \overrightarrow{\upsilon}.\overrightarrow{\mathcal{P}} - \mathcal{L} \\
&= \frac{m\upsilon_x^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + qA_x\upsilon_x + \frac{m\upsilon_y^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + qA_y\upsilon_y + \frac{m\upsilon_z^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + qA_z\upsilon_z \\
&+ mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} - q\left(A_x\upsilon_x + A_y\upsilon_y + A_z\upsilon_z\right) + q\phi \\
&= \frac{m\upsilon^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} + q\phi = \gamma m\upsilon^2 + \frac{1}{\gamma}mc^2 + q\phi \\
&= \left(\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2}\right)\gamma mc^2 + q\phi
\end{aligned}
$$

comme $\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} = 1$ alors $\boxed{E = \gamma mc^2 + q\phi}$