Université de Jijel-Faculté SEI-Département de Physique

3ème Licence Physique Fondamentale (2018/2019)

Module: Relativité restreinte.

Durée : 1h 45 mn Le 07 Février 2019

Examen

Exercice 01 : (02 pts)

1) Quelle est la vitesse d'un proton dont l'énergie cinétique est égale à deux fois son énérgie au repos ?

2) On observe qu'une horloge dans un vaisseau spatial indique un temps égale à 3/5 de celui indiqué par une horloge similaire restée sur Terre. A quelle vitesse le vaisseau se déplace-t-il ?

Exercice 02 : (05 pts)

Un vaisseau spatial s'éloigne de la Terre avec une vitesse rectiligne uniforme. On veut calculer la vitesse V que devrait se déplacer ce vaisseau pour qu'un observateur terrestre perçoive rouge la lumière émise par ses feux arrières verts. Soit $(\mathcal{R})$ le référentiel terrestre supposé galiléen et $(\mathcal{R}')$ le référentiel propre du vaisseau spatial. Pour simplifier, on prend $\overrightarrow{V}$ suivant l'axe Ox.

1) Écrivez les composantes du 4-vecteur d'onde $\underline{k} = (\frac{\omega}{c}, \overrightarrow{k})$ dans les deux référentiels.

2) Soit λ' la longueur d'onde de la lumière émise par rapport à $(\mathcal{R}')$ et λ la longueur d'onde par rapport à $(\mathcal{R})$. Montrer que $\lambda' = f(\beta)\,\lambda$ où $f(\beta)$ est une fonction de $\beta = V/c$ à déterminer.

3) En déduire la vitesse du vaisseau spatial par rapport au référentiel terrestre $(\mathcal{R})$.

On prendra pour longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0,7\ \mu m$ pour la radiation rouge et $\lambda' = 0,5\ \mu m$ pour la radiation verte.

Exercice 03 : (07 pts)

On considère dans le référentiel galiléen $(\mathcal{R})$ du laboratoire la réaction de photoproduction

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$$

par collision d'un photon γ d'énergie E_γ et d'impulsion $\overrightarrow{p}_\gamma$ sur un proton p immobile conduisant à l'état final constitué d'un neutron n et d'un méson π^+. On donne les masses: $m_n = 939,55\ \mathsf{MeV}/c^2$, $m_{\pi^+} = 139,60\ \mathsf{MeV}/c^2$ et $m_p = 938,25\ \mathsf{MeV}/c^2$.

1) Écrivez le 4-vecterur énergie-impulsion du système $(\gamma + p)$ dans $(\mathcal{R})$ et dans le référentiel du centre de masse $(\mathcal{R}^*)$.

2) Établir la relation entre l'énergie E_γ du photon incident et l'énergie totale E^* du système $(\gamma + p)$ dans $(\mathcal{R}^*)$.

3) Montrer que cette réaction ne peut avoir lieu que si l'énergie du photon E_γ est supérieure à une valeur limite E_0 que l'on déterminera. Faire l'application numérique.

4) On suppose que l'impulsion $\overrightarrow{p}_\gamma$ du photon est dirigée selon l'axe des x. Déterminer la vitesse de translation V du référentiel $(\mathcal{R}^*)$ par rapport à $(\mathcal{R})$ dans le cas où $E_\gamma = E_0$. Faire l'application numérique.

Exercice 04 : (06 pts)

Dans le référentiel du laboratoire $(\mathcal{R})$, régne un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{k}$ et un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{j}$ perpendiculaires. On considère également un référentiel $(\mathcal{R}')$ se déplaçant par rapport à $(\mathcal{R})$ avec une vitesse rectiligne uniforme $\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{i}$.

1/ Écrire dans $(\mathcal{R})$ le tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ pour ce cas particulier.

2/ Le tenseur électromagnétique $F'^{\mu\nu}$ dans $(\mathcal{R}')$ est donné par la matrice

$$F'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{E'_z}{c} \\ 0 & 0 & 0 & B'_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E'_z}{c} & -B'_y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce tenseur électromagnétique se transforme, lors d'une transformation de Lorentz, selon la loi: $F'^{\mu\nu} = L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta}$. Déterminer les formules de transformation de E'_z et B'_y .

3/ Vérifiez l'invariance de $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{B}$ et de $\overrightarrow{E}^2 - c^2\overrightarrow{B}^2$.

4/ Donner la valeur de la vitesse V de $(\mathcal{R}')$ dans les deux cas suivants : (a) Le champ électrique s'annule dans $(\mathcal{R}')$. (b) Le champ magnétique s'annule dans $(\mathcal{R}')$.

On donne : $$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L^\mu{}_\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'Examen

Exercice 01 :

1) On a la relation $E = T + mc^2 = 3mc^2$

On a aussi $E = \gamma mc^2$, on déduit que $\gamma = 3 \Rightarrow 1/\sqrt{1-\beta^2} = 3 \Rightarrow \beta^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \boxed{V = \frac{2\sqrt{2}}{3}c}$.

2) C'est la dilatation du temps, on a $T' = \frac{3}{5}T$ et d'aprés le cours on a $T = \gamma T'$ où T' est le temps propre (temps indiqué par l'horloge du vaisseau spatial). On a alors: $\gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow 1/\sqrt{1-\beta^2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{V = \frac{4}{5}c}$

Exercice 02 :

1) Les composantes du 4-vecteur $\underline{k} = (\frac{\omega}{c}, \overrightarrow{k})$ dans les deux référentiels:

$$\text{dans } (\mathcal{R}):\quad \underline{k} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ -k\overrightarrow{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \text{dans } (\mathcal{R}'):\quad \underline{k}' = \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ -k'\overrightarrow{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda'} \\ -\frac{2\pi}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = \lambda\nu$

2) Pour Trouver la relation entre λ' et λ, il suffit d'appliquer la transformation de Lorentz d'un 4-vecteur. On a vu en cours que: $\underline{k}' = L\underline{k}$ où L est la matrice de Lorentz, donc:

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda'} \\ -\frac{2\pi}{\lambda'} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{\lambda} \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \beta = \frac{V}{c}$$

il vient de la première composante:

$$\frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda}\gamma\,(1+\beta) \Rightarrow \lambda' = \lambda\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} \Rightarrow \lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda \text{ donc } \boxed{f(\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}}.$$

3) On a , d'aprés la deuxième question, $\lambda' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\lambda \Rightarrow \beta = \dfrac{\lambda^2 - \lambda'^2}{\lambda^2 + \lambda'^2}$

AN: $\beta = \dfrac{(0,7)^2 - (0,5)^2}{(0,7)^2 + (0,5)^2} \simeq 0,324$. La vitesse du vaiseau spatial par rapport à $(\mathcal{R})$ est:

$$\boxed{V = 9,72 \times 10^7 \text{ m/s}}.$$

Exercice 03 :

1) Le 4-vecterur énergie-impulsion du système $(\gamma + p)$:

dans $(\mathcal{R})$: $\begin{pmatrix} \frac{E_\gamma + m_p c^2}{c} \\ \overrightarrow{p}_\gamma \end{pmatrix}$, dans $(\mathcal{R}')$: $\begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ \overrightarrow{0} \end{pmatrix}$

2) La relation entre E_γ et E^* :

L'invariance du carré des quadrivecteurs donne:

$$\frac{(E_\gamma + m_p c^2)^2}{c^2} - p_\gamma^2 = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{(E_\gamma + m_p c^2)^2}{c^2} - \frac{E_\gamma^2}{c^2} = \left(\frac{E^*}{c}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(E_\gamma + m_p c^2\right)^2 - E_\gamma^2 = E^{*2}$$

$$\Rightarrow E_\gamma^2 + 2m_p c^2 E_\gamma + m_p^2 c^4 - E_\gamma^2 = E^{*2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^* = \sqrt{m_p c^2 \left(2E_\gamma + m_p c^2\right)}}$$

3) Cette réaction ne peut avoir lieu que si $E^* \geq$ (les énergies de masse des particules formés); c'est-à-dire:

$$E^* \geq \left(m_n c^2 + m_\pi c^2\right) \Rightarrow m_p c^2 \left(2E_\gamma + m_p c^2\right) \geq \left(m_n + m_\pi\right)^2 c^4$$

$$\Rightarrow 2m_p E_\gamma \geq \left(m_n + m_\pi\right)^2 c^2 - m_p^2 c^2$$

$$\Rightarrow E_\gamma \geq \frac{\left[\left(m_n + m_\pi\right)^2 - m_p^2\right]}{2m_p} c^2$$

$$\text{donc} \quad \boxed{E_0 = \frac{\left[\left(m_n + m_\pi\right)^2 - m_p^2\right]}{2m_p} c^2}$$

AN:

$$E_0 = \frac{\left(m_n c^2 + m_\pi c^2\right)^2 - \left(m_p c^2\right)^2}{2m_p c^2} = \frac{(939,55 + 139,6)^2 - (938,25)^2}{2\,(938,25)}$$

$$\boxed{E_0 = 151,48 \text{ MeV}}$$

4) Pour déterminer la vitesse de translation V du référentiel $(\mathcal{R}^*)$ par rapport à $(\mathcal{R})$, on utilise la transformation de Lorentz entre les 4-vecteurs d'énergie-impulsion:

$$\begin{pmatrix} \frac{E^*}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E_0 + m_p c^2}{c} \\ p_\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient (deuxième équation):

$$0 = -\beta\gamma \frac{E_0 + m_p c^2}{c} + \gamma p_\gamma \Rightarrow p_\gamma = \beta \frac{E_0 + m_p c^2}{c} \quad \text{mais} \quad p_\gamma = \frac{E_0}{c}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{E_0}{E_0 + m_p c^2}$$

la vitesse de translation V du référentiel $(\mathcal{R}^*)$ par rapport à $(\mathcal{R})$ est donc: $\boxed{V = \dfrac{cE_0}{E_0 + m_p c^2}}$

AN: $V = \dfrac{151,48}{151,48 + 938,25} c \Rightarrow \boxed{V \simeq 0,14c}$

Exercice 04 :

1/ Le tenseur électromagnétique dans $(\mathcal{R})$: $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{E}{c} \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E}{c} & -B_y & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2/ Calculons E'_z et B'_y :

$$
\begin{aligned}
-\frac{E'_z}{c} &= F'^{03} = L^0{}_\alpha L^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = L^0{}_0 L^3{}_3 F^{03} + L^0{}_1 L^3{}_3 F^{13} \\
&= \gamma F^{03} - \gamma\beta F^{13} = \gamma\left(-\frac{E}{c}\right) - \gamma\beta\,(B) \Rightarrow \boxed{E'_z = \gamma\,(E + VB)} \\
B'_y &= F'^{13} = L^1{}_\alpha L^3{}_\beta F^{\alpha\beta} = L^1{}_0 L^3{}_3 F^{03} + L^1{}_1 L^3{}_3 F^{13} \\
&= -\gamma\beta F^{03} + \gamma F^{13} = -\gamma\beta\left(-\frac{E}{c}\right) + \gamma B \Rightarrow \boxed{B'_y = \gamma\left(\tfrac{\beta E}{c} + B\right)}
\end{aligned}
$$

3/ L'invariance de $\overrightarrow{E}.\overrightarrow{B}$: on a

$$\overrightarrow{E'}.\overrightarrow{B'} = E'_x B'_x + E'_y B'_y + E'_z B'_z = 0 \text{ et } \overrightarrow{E}.\overrightarrow{B} = EB\left(\overrightarrow{k}.\overrightarrow{j}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{E'}.\overrightarrow{B'} = \overrightarrow{E}.\overrightarrow{B}$$

et pour $\overrightarrow{E}^2 - c^2\overrightarrow{B}^2$: on a:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{E'}^2 - c^2\overrightarrow{B'}^2 &= E'^2_z - B'^2_y c^2 = \gamma^2\,(E + VB)^2 - \gamma^2\,(\beta E + cB)^2 \\
&= \left(1 - \beta^2\right)\gamma^2 E^2 + \gamma^2\left(V^2 - c^2\right) B^2 \\
&= \left(1 - \beta^2\right)\gamma^2 E^2 + \gamma^2\left(\beta^2 - 1\right) c^2 B^2 = E^2 - c^2 B^2
\end{aligned}
$$

4/ (a) Le champ électrique s'annule dans $(\mathcal{R}')$ $\Rightarrow E'_z = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\dfrac{E}{B}}$

(b) Le champ magnétique s'annule dans $(\mathcal{R}')$ $\Rightarrow B'_y = 0 \Rightarrow \boxed{V = -\dfrac{c^2 B}{E}}$

.