Université de Jijel - Faculté SEI

Département de Physique

3ème Licence Physique des rayonnements. Date: 22/01/2019

Module: M.Q II. (S5, 2018/2019). Durée: 1h 30 min

Aucun document n'est autorisé

<u>EXAMEN</u>

<u>Exercice 01:</u> (08 Pts)

Un système de deux particules de spins $s_1 = \frac{3}{2}$ et $s_2 = \frac{1}{2}$ est décrit par l'hamiltonien effectif: $H = A\left(S_{1z} + S_{2z}\right)^2 + B\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2$, où A et B sont des constantes. Soit la base $\{|s_1, s_2, m_1, m_2\rangle\}$ de l'espace produit tensoriel $\xi = \xi(s_1) \otimes \xi(s_2)$ commune à l'ensemble $\{S_1^2, S_2^2, S_{1z}, S_{2z}\}$, et soit une deuxième base $\{|s, m\rangle\}$ commune à l'ensemble $\{S_1^2, S_2^2, S^2, S_z\}$ avec $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2$.

1) a) Quelles sont les valeurs possibles de s ? b) Quelle est la dimension de ξ ?

2) a) Montrer que les états $|s, m\rangle$ sont états propres de H.

b) Donner ainsi l'énergie $E_{s,m}$ en fonction de A et B pour chaque valeurs de s et m. Est-ce-qu'il y a de dégénérescence ?

3) Trouver les C-G a , b et c tels que:

$$|2, 2\rangle = a\left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$|2, 1\rangle = b\left|s_1, s_2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle + c\left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

4) Soit le vecteur $|1, 1\rangle = d\left|s_1, s_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + e\left|s_1, s_2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ où d et e sont des C-G à déterminer de façon que $\langle 1, 1 | 2, 1\rangle = 0$.

<u>Exercice 02:</u> (10 Pts)

Une particule de masse m est soumise à un oscillateur harmonique de pulsation ω dont l'hamiltonien est $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Une perturbation $H_p = \frac{\lambda}{2}m\omega^2 x^2$ s'ajoute à H_0 où $\lambda << 1$. Soit $|n\rangle$ un état propre de H_0 tel que $H_0|n\rangle = E_n|n\rangle$.

1) a) Ecrire H_0 en fonction des opérateurs a et a^+. b) En déduire l'énergie E_n.

2) Trouver la correction en énergie de l'état $|0\rangle$ de l'oscillateur au premier ordre $\Delta E^{(1)}$.

3) Montrer, par un calcul exact, que l'expression précédente représente une très bonne approximation de l'énergie de l'oscillateur perturbé.

4) On supprime la perturbation H_p et on applique maintenant, à l'instant $t = 0$, une perturbation dépendante du temps de la forme $V(x,t) = \varepsilon x^2 e^{-t/\tau}$, où $\varepsilon <<$ est un paramètre réel positif et τ est une constante. On suppose qu'à $t = 0$ l'oscillateur est à son état fondamental. a) Calculer l'élément de matrice $\langle n| x^2 |0\rangle$.

b) Calculer la probabilité de transition au premier ordre $P_{0\to n}$ pour que la particule se trouve dans un état excité $|n\rangle$ après un temps suffisamment long (i.e., $t \to +\infty$).

c) En déduire $P_{0\to 1}$, $P_{0\to 2}$ et $P_{0\to 3}$. Puis, calculer la probabilité $P_{0\to n}$ pour $n > 3$. Que peut-on en déduire ?

<u>Exercice 03:</u> (03 Pts)

Un système composé de deux particules sans interactions mutuelles notées (1) et (2), d'états $\psi_\alpha\ (\xi_1)$ et $\psi_\beta\ (\xi_2)$ respectivement. α et β sont des nombres quantiques.

Ecrire la fonction d'onde $\psi_{\alpha,\beta}\ (\xi_1, \xi_2)$ du système lorsque les 2 particules sont:

(a) discernables. (b) des bosons identiques (c) des fermions identiques.

(d) discuter le cas $\alpha = \beta$ pour un système de deux fermions. Conclusion.

On donne:

$$\langle j_1, j_2, j_1, j - j_1, | j, j\rangle > 0$$

$$J_\pm |j, m\rangle = \hbar\sqrt{j\,(j+1) - m\,(m \pm 1)}\, |j, m \pm 1\rangle$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}p$$

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,, \qquad a^+\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$$(1+\alpha)^\beta = 1 + \alpha\beta + \frac{\beta\,(\beta-1)}{2!}\alpha^2 + ...$$

$$P_{i\to f}\,(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{t_i}^{t} e^{i\omega_{fi}t'}\,\langle\varphi_f|\,V\,(t')\,|\varphi_i\rangle\,dt'\right|^2$$

Dr. N. Ferkous

CORRECTION

Exercice 01: (08 Pts)

1) a) Les valeurs possibles de s : on a $|s_1 - s_2| \leq s \leq |s_1 + s_2| \Rightarrow 1 \leq s \leq 2 \Rightarrow$ $\boxed{\text{s=1,2}}$

b) La dimension de ξ est : $\dim(\xi) = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) \Rightarrow \boxed{\dim(\xi) = 8}$

2) Les états $|s, m\rangle$ sont états propres de H :

$$H|s,m\rangle = \left[A(S_{1z} + S_{2z})^2 + B\overrightarrow{S}_1.\overrightarrow{S}_2\right]|s,m\rangle = \left[AS_z^2 + \frac{B}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)\right]|s,m\rangle$$
$$= \left[A\hbar^2 m^2 + \frac{B\hbar^2}{2}\left(s(s+1) - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right)\right]|s,m\rangle$$
$$= \left\{A\hbar^2 m^2 + \frac{B\hbar^2}{2}\left[s(s+1) - \frac{9}{2}\right]\right\}|s,m\rangle$$

Donc les états $|s, m\rangle$ sont états propres de H avec les valeurs propres

$$\boxed{E_{s,m} = A\hbar^2 m^2 + \tfrac{B\hbar^2}{2}\left[s(s+1) - \tfrac{9}{2}\right]}$$

pour $s = 1 \Rightarrow m = 1, 0, -1$ c-à-d: $E_{1,m} = \hbar^2\left(Am^2 - \frac{5}{4}B\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{1,1} = \hbar^2\left(A - \frac{5}{4}B\right) \\ E_{1,0} = -\frac{5\hbar^2}{4}B \\ E_{1,-1} = \hbar^2\left(A - \frac{5}{4}B\right) \end{cases}$$

pour $s = 2 \Rightarrow m = 2, 1, 0, -1, -2$ c-à-d: $E_{2,m} = A\hbar^2 m^2 + \frac{3}{4}B\hbar^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{2,2} = \hbar^2\left(4A + \frac{3}{4}B\right) \\ E_{2,1} = \hbar^2\left(A + \frac{3}{4}B\right) \\ E_{2,0} = \frac{3\hbar^2}{4}B \\ E_{2,-1} = \hbar^2\left(A + \frac{3}{4}B\right) \\ E_{2,-2} = \hbar^2\left(4A + \frac{3}{4}B\right) \end{cases}$$

Oui, il y a dégénéréscenec des niveaux $E_{s,m} = E_{s,-m}$.

3) Développement du ket $|2, 2\rangle$ sur la base $\{|s_1, s_2, m_1, m_2\rangle\}$:

$$|2,2\rangle = \sum_{m_1,m_2}\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right\rangle\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right|2,2\rangle$$
$$= \sum_{m_1,m_2}\left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right|2,2\rangle\left|\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},m_1,m_2\right\rangle$$
$$= \left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right|2,2\rangle\left|s_1,s_2,\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right\rangle \Rightarrow a = \left\langle\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}\right|2,2\rangle$$

avec la condition de normalisation $a^2 = 1$ c-à-d $a = \pm 1$ et la convention de phase $\langle j_1, j_2, j_1, j - j_1 | \, j, j \rangle > 0 \Rightarrow \boxed{a = 1}$. Donc: $|2,2\rangle = \left|s_1, s_2, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$

Le ket $|2,1\rangle$ peut être trouvé en appliquant l'opérateur $S_- = (S_1)_- + (S_2)_-$ sur le ket $|2,2\rangle$:

$$\begin{aligned}
S_- |2,2\rangle &= \left[(S_1)_- + (S_2)_-\right] \left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \\
&\Rightarrow 2\hbar |2,1\rangle = \hbar\sqrt{3} \left|s_1, s_2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle + \hbar \left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
&\Rightarrow |2,1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} \left|s_1, s_2, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{2} \left|s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \\
&\boxed{\Rightarrow b = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \quad c = \tfrac{1}{2}}
\end{aligned}$$

4) Soit le vecteur $|1,1\rangle = d \left|s_1, s_2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle + e \left|s_1, s_2, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle$ où d et e sont des C-G:

On a $\langle 1,1 | 2,1\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} d + \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow d = -\frac{e}{\sqrt{3}}$. Le ket $|1,1\rangle$ est normé alors:

$$d^2 + e^2 = 1 \Rightarrow \frac{e}{3}^2 + e^2 = 1 \Rightarrow e = \pm \frac{3}{4}$$

Pour déterminer le bon signe de e, il faut réécrire ce coefficient explicitement comme suit:

$$e = \left\langle s_1, s_2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2} \right| 1,1 \rangle$$

et la convention de phase $\langle j_1, j_2, j_1, j - j_1 | \, j, j \rangle > 0 \Rightarrow e > 0 \Rightarrow \boxed{e = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et par suite $\boxed{d = -\frac{1}{2}}$.

<u>Exercice 02:</u> (10 Pts)

I) a) H_0 en fonction de a et a^+: On a:

$$\begin{aligned}
a^+ a &= \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p\right) \\
&\Rightarrow a^+ a = \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{i}{2\hbar}(xp - px) \\
&\Rightarrow a^+ a = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2m} p^2\right) - \frac{1}{2} \quad \text{puisque } [x,p] = i\hbar \\
&\Rightarrow a^+ a = \frac{1}{\hbar\omega} H_0 - \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{H_0 = \hbar\omega\left(a^+ a + \tfrac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

b) $H_0 |n\rangle = E_n |n\rangle$.

$$\hbar\omega\left(a^+ a + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n |n\rangle .$$

mais comme $a^+ a = N$ et puisque $N|n\rangle = n|n\rangle \Rightarrow \boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$. $n = 0, 1, 2, ...$

2) La correction en énergie de l'état $|0\rangle$ de l'oscillateur au premier ordre:

$$\Delta E^{(1)} = \langle 0| H_p |0\rangle = \frac{\lambda}{2} m\omega^2 \langle 0| x^2 |0\rangle$$

L'opérateur de position x s'écrit en fonction des opérateurs de créations et d'annihilation comme:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^+\right)$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta E^{(1)} &= \frac{\lambda\hbar\omega}{4} \langle 0| \left(a + a^+\right)^2 |0\rangle = \frac{\lambda\hbar\omega}{4} \langle 0| \left(a^2 + a^+ + aa^+ + a^+a\right) |0\rangle \\ &= \frac{\lambda\hbar\omega}{4} \langle 0| aa^+ |0\rangle = \frac{\lambda\hbar\omega}{4} \langle 0| 0\rangle \Rightarrow \boxed{\Delta E^{(1)} = \frac{\lambda\hbar\omega}{4}} \end{aligned}$$

Alors l'énergie de l'état fondamental à l'ordre 1 en λ est:

$$E^{(1)} = E_0 + \Delta E^{(1)} = \frac{\hbar\omega}{2} + \lambda \frac{\hbar\omega}{4}$$

3) Calcul exact:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_p = \tfrac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \tfrac{\lambda}{2} m\omega^2 x^2 \\ &= \tfrac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega^2 (1+\lambda) x^2 \Rightarrow H = \tfrac{p^2}{2m} + \tfrac{1}{2} m\omega'^2 x^2 \end{aligned}$$

avec $\omega' = \omega\sqrt{1+\lambda}$. Ainsi, l'énergie exacte est:

$$\text{et} \quad E_n^{(e)} = \hbar\omega' \left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\sqrt{1+\lambda} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

donc au premier ordre en λ, l'énergie exacte de l'état fondamental est:

$$\text{et} \quad E_0^{(e)} \simeq \frac{1}{2}\hbar\omega \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) + O\left(\lambda^2\right) \simeq \frac{1}{2}\hbar\omega + \lambda\frac{\hbar\omega}{4} + O\left(\lambda^2\right)$$

On remarque que $E^{(1)} = E_0^{(e)}$ à l'ordre 1 λ.

4) a) Calcul de $\langle n| x^2 |0\rangle$:

$$\langle n| x^2 |0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n| \left(a + a^+\right)^2 |0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \langle n| \left(aa^+ + \left(a^+\right)^2\right) |0\rangle$$

mais $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ et $a^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$ alors:

$$\langle n| x^2 |0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\langle n| 0\rangle + \sqrt{2}\langle n| 2\rangle\right] \Rightarrow \boxed{\langle n| x^2 |0\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \left[\delta_{n,0} + \sqrt{2}\delta_{n,2}\right]}$$

b) Calcul de la probabilité de transition $P_{0\to n}$:

$$P_{0\to n} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^{+\infty} dte^{i\omega_{if}t}\langle n|V(x,t)|0\rangle\quad\right|^2$$

avec $\omega_{if} = \omega_{0n} = \frac{E_n - E_0}{\hbar} = \omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \omega\left(0+\frac{1}{2}\right) = n\omega$.

Alors:

$$P_{0\to n} = \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2\left(\delta_{n,0}+\sqrt{2}\delta_{n,2}\right)^2\left|\int_0^{+\infty} dte^{(in\omega-1/\tau)t}\right|^2$$

$$\boxed{P_{0\to n} = \left(\frac{\varepsilon}{2m\omega}\right)^2\left(\delta_{n,0}+\sqrt{2}\delta_{n,2}\right)^2\frac{1}{n^2\omega^2+1/\tau^2}}$$

Donc: $P_{0\to 1} = 0$, $\quad P_{0\to 2} = \frac{\varepsilon^2}{2m^2\omega^2}\frac{1}{(n^2\omega^2+1/\tau^2)}$ et $P_{0\to 3} = 0$.

3) $P_{0\to 3} = 0$ pour $n > 3$. Le système ne peut avoir des transitions sauf entre l'état fondamental et le second état excité.

Exercice 03: (03 Pts)

(a) discernables: $\psi_{\alpha,\beta}(\xi_1,\xi_2)$ est le produit des états individuels $\psi_\alpha(\xi_1)$ et $\psi_\beta(\xi_2)$:

$$\psi_{\alpha,\beta}(\xi_1,\xi_2) = \psi_\alpha(\xi_1)\psi_\beta(\xi_2)$$

(b) des bosons identiques: $\psi_{\alpha,\beta}(\xi_1,\xi_2)$ doit être une fonction symétrique:

$$\psi_{\alpha,\beta}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_\alpha(\xi_1)\psi_\beta(\xi_2)+\psi_\alpha(\xi_2)\psi_\beta(\xi_1)\right]$$

(c) des fermions identiques. $\psi_{\alpha,\beta}(\xi_1,\xi_2)$ doit être une fonction antisymétrique:

$$\psi_{\alpha,\beta}(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_\alpha(\xi_1)\psi_\beta(\xi_2)-\psi_\alpha(\xi_2)\psi_\beta(\xi_1)\right]$$

(d) si $\alpha=\beta$ pour un système de deux fermions, on a $\psi_{\alpha,\alpha}(\xi_1,\xi_2) = 0 \Rightarrow$ deux fermions identiques ne peuvent être dans le même état quantique (c'est le principe d'exclusion de Pauli).