Université de Jijel
Faculté de Sciences exactes et informatique
Département de Mathématiques

2ème L.M.D Maths
Logique mathématique
2020/2021

Devoir

Exercice 1. Soit E l'ensemble des variables propositionnelles.
Montrer que pour toute formule F, il existe au moins une formule G ne contenant pas le connecteur "$\neg$" telle que F est logiquement équivalente à G ou logiquement équivalente à $\neg G$, en traitant les cas suivants

1. Si $F \in E$.
2. Si $F = \neg H$, tel que il existe une formule G_1 ne contenant pas le connecteur $\neg$ et telle que
$$H \sim G_1 \quad ou \quad H \sim \neg G_1.$$
3. Si $F = (H \wedge K)$, tel que il existe deux formules G_1 et G_2 ne contenant pas le connecteur $\neg$ et telles que
   3.1. $H \sim G_1$ et $K \sim G_2$
   3.2. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim G_2$
   3.3. $H \sim G_1$ et $K \sim \neg G_2$
   3.4. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim \neg G_2$
4. Si $F = (H \vee K)$, tel que il existe deux formules G_1 et G_2 ne contenant pas le connecteur $\neg$ et telles que
   4.1. $H \sim G_1$ *et* $K \sim G_2$
   4.2. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim G_2$
   4.3. $H \sim G_1$ et $K \sim \neg G_2$
   4.4. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim \neg G_2$
5. Si $F = (H \Rightarrow K)$, tel que il existe deux formules G_1 et G_2 ne contenant pas le connecteur $\neg$ et telles que
   5.1. $H \sim G_1$ et $K \sim G_2$
   5.2. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim G_2$
   5.3. $H \sim G_1$ et $K \sim \neg G_2$
   5.4. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim \neg G_2$.
6. Si $F = (H \Leftrightarrow K)$, tel que il existe deux formules G_1 et G_2 ne contenant pas le connecteur $\neg$ et telles que
   6.1. $H \sim G_1$ et $K \sim G_2$
   6.2. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim G_2$
   6.3. $H \sim G_1$ et $K \sim \neg G_2$
   6.4. $H \sim \neg G_1$ et $K \sim \neg G_2$.

Exercice 2. On considère l'ensemble de variables propositionnelles

$$P = \{p_1, \cdots, p_n\}$$

1) Montrer que la formule

$$\Big(\big(\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (p_i \wedge p_j) \big) \Leftrightarrow \big(\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (\bigvee_{j \neq i} p_j) \big) \Big)$$

est une tautologie.
2) Quelles sont les distributions de valeurs de vérité sur P qui rendent fausse la formule

$$\Big(\big(\bigvee_{1 \leq i \leq n} p_i \big) \Leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \big(\bigvee_{i \neq j} p_j \big) \Big)?$$

Exercice 3. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$, on peut trouver n entiers strictement positifs x_1, x_2,..., x_n, deux à deux distincts tels que

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

N.B. On peut utiliser le fait que $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_0 + u_1 + \cdots + u_n, \quad \forall n \geq 0 \end{array} \right.$$

Démontrer en utilisant la récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$.