

VIII. FLEXION PLANE

L'effort tranchant et le moment fléchissant sont déterminés par la méthode des sections.

La valeur de l'effort tranchant Q_x dans une section droite quelconque de la poutre est égale à la somme algébrique des projections de toutes les forces extérieures (concentrées ou réparties) agissant sur la poutre d'un côté de la section considérée, sur l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.

La valeur du moment fléchissant M_x dans une section droite quelconque de la poutre est égale à la somme algébrique des moments

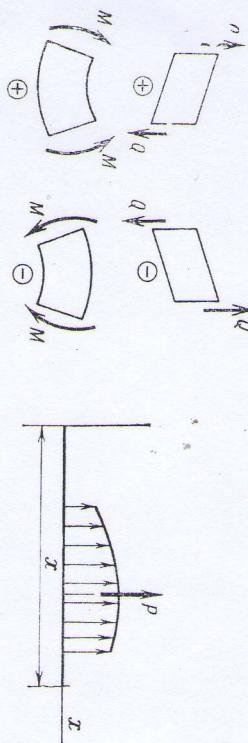


Fig. 49

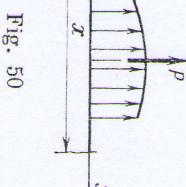


Fig. 50

de toutes les charges extérieures, agissant d'un côté de la section considérée, par rapport à l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section.

On admet que les valeurs positives et négatives de Q et M correspondent aux directions indiquées fig. 49.

Si la répartition de la charge se termine avant la section considérée (fig. 50), cette charge repartie peut être considérée comme une charge concentrée, appliquée dans la section passant par le centre de gravité de l'aire du diagramme de la charge répartie.

Pour les charges variant linéairement, les aires et les positions des centres de gravité des parties tranchées se déterminent aisément d'après les formules de la géométrie. Si les charges varient suivant une parabole de deuxième degré ABC (fig. 51), il est utile d'avoir en

vue les formules suivantes de la géométrie analytique: l'aire de la parabole $ABC = \frac{2}{3}lh$; le centre de gravité O de cette aire est sur la verticale BD ; l'aire du segment parabolique $FBE = \frac{2}{3}l_1h_1$, le centre de gravité O_1 de cette aire est situé à une distance $\frac{1}{2}l_1$ de la verticale FH ; l'aire de chaque demi-parabole (ABD et DBC) est $\frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2}h = \frac{1}{3}lh$; le centre de gravité O_2 de cette aire est situé à une distance $\frac{3}{8} \cdot \frac{l}{2} = \frac{3}{16}l$ de la ligne BD ; l'aire du triangle rectangle CBG avec une

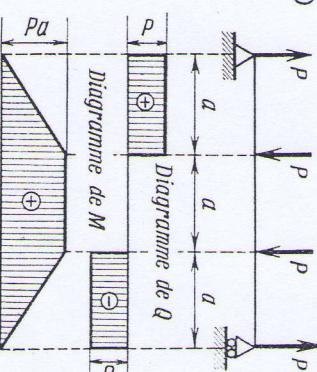
hypoténuse parabolique $BC: \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2}h = \frac{1}{6}l \cdot h$, le centre de gravité O_3 de cette aire est à une distance $\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{8}l$ de la verticale CG .

Il est recommandé de s'approcher de la section du côté de la poutre le moins chargé et de construire d'abord le diagramme de Q et puis celui de M .

Des définitions des quantités Q et M , conformément à la convention de signes, il découle que pour des poutres symétriques par rapport aux charges et aux



a)



b)

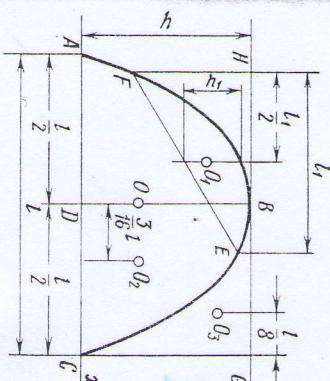


Fig. 51

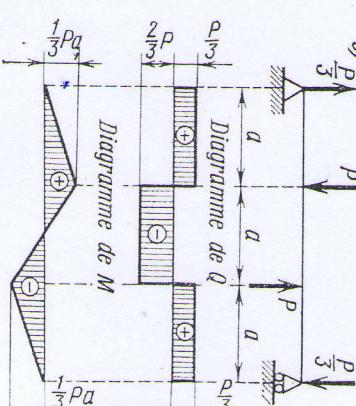


Fig. 52

types de liaisons, le diagramme de l'effort tranchant doit être antisymétrique et le diagramme du moment fléchissant, symétrique (fig. 52, a).

Pour des poutres antisymétriques, vice-versa, le diagramme de l'effort tranchant doit être symétrique et le diagramme du moment fléchissant, antisymétrique (fig. 52, b).

De la définition de Q il découle que dans une section, où est appliquée une force concentrée, le diagramme de l'effort tranchant doit avoir un saut de discontinuité de même grandeur que cette force extérieure (fig. 52, a et fig. 52, b).

De la définition de M il découle que, dans une section soumise à un couple, le diagramme du moment fléchissant doit avoir un saut de discontinuité de même grandeur que le moment de ce couple (fig. 53).

Pour les poutres non soumises à des couples provoquant une flexion, la construction des diagrammes de Q et de M , ainsi que le contrôle de leurs exactitudes, s'effectue à l'aide des relations différentielles (90) et (91) entre M , Q et q et des conséquences qui en découlent:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad (90)$$

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (91)$$

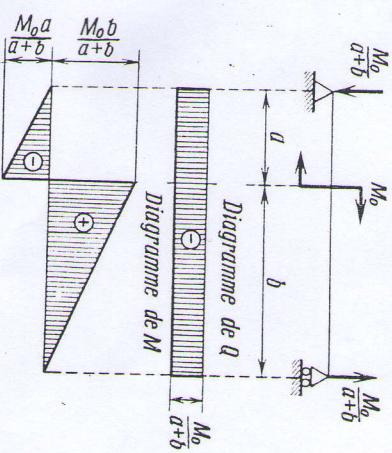


Fig. 53

Principaux corollaires des relations (90) et (91):

1. Géométriquement, l'effort tranchant est interprété comme la tangente de l'angle formé par la tangente au diagramme du moment fléchissant et par l'axe x de la poutre, et l'intensité de la charge, comme la tangente de l'angle formé par cet axe et la tangente au diagramme de l'effort tranchant.

2. Si les fonctions décrivant les variations des charges réparties sont des fonctions algébriques dans chaque partie de la poutre, le degré de la fonction de l'effort tranchant est supérieur d'une unité au degré de la fonction de la charge répartie dans cette même partie de la poutre, et le degré de la fonction du moment fléchissant est supérieur d'une unité au degré de la fonction de l'effort tranchant.

3. Dans la section de la poutre où l'effort tranchant est nul, le moment fléchissant a une valeur extrême, et dans la section où l'effort tranchant passe par la valeur zéro d'une manière discontinue, le diagramme du moment fléchissant perd son allure monotone.

4. Dans la section de la poutre où le diagramme de l'effort tranchant a un saut ne passant pas par la valeur zéro, le diagramme du moment fléchissant a un point anguleux.

5. Si sur toute la longueur de la poutre ou sur une de ses parties le diagramme de l'effort tranchant est un isométrique, sur ces mêmes parties le diagramme du moment fléchissant est symétrique, et vice-versa.

6. Dans chaque partie de la poutre la variation du moment fléchissant entre deux sections droites quelconques est égale à l'aire du diagramme des efforts tranchants entre ces deux sections.
7. Si l'axe x est orienté vers la gauche de la section extrême droite de la poutre, on a:

$$Q = -\frac{dM}{dx}.$$

8. La concavité du diagramme curviligne du moment fléchissant est dirigée suivant le sens de l'intensité de la charge répartie provoquant la forme curviligne.

Il est utile de savoir que dans la section droite coïncidant avec l'axe de symétrie directe de la poutre l'effort tranchant (force antisymétrique) est nul et que dans la section coïncidant avec l'axe de symétrie indirecte de la poutre le moment fléchissant (moment symétrique) est nul. Si une force extérieure concentrée agit sur la poutre suivant l'axe de symétrie directe de la poutre, les valeurs numériques des efforts tranchants dans les sections à gauche et à droite de l'axe de symétrie sont égales à la moitié de cette force.

Construction des diagrammes de Q et M d'après leurs équations

Exemple 26. Étant donné $M_1 = 2 \text{ t}\cdot\text{m}$, $M_2 = 12 \text{ t}\cdot\text{m}$, $q_1 = 2 \text{ t}/\text{m}$, $q_2 = 4 \text{ t}/\text{m}$, $P = 12 \text{ t}$, $a = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$, $d = 4 \text{ m}$ (fig. 54), construire les diagrammes de Q et de M .

Solution. Déterminons les réactions A et B des appuis d'après la condition de la statique en prenant les sommes des moments par rapport aux appuis droit et gauche:

$$A(a+b+c+d) - q_1b\left(\frac{b}{2} + c + d\right) - M_2 + Pd - q_2d\frac{d}{2} = 0;$$

$$A \cdot 10 - 2 \cdot 2 \cdot 6 - 12 + 12 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 2 = 0; \quad A = 2 \text{ t};$$

$$B(d+c+b+a) - q_2d\left(\frac{d}{2} + c + b + a\right) + P(c+b+a) + M_2 - q_1b\left(\frac{b}{2} + a\right) = 0;$$

$$B \cdot 10 - 4 \cdot 4 \cdot 8 + 12 \cdot 6 + 12 - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 0; \quad B = 6 \text{ t}.$$

Pour simplifier les expressions de Q et de M nous considérons des sections du côté gauche dans les parties de longueurs a et b et du côté droit dans les parties de longueurs d et c :

$$0 \leq x_1 \leq a;$$

$$Q_{x_1} = A = 2 \text{ t}; \quad M_{x_1} = -M_1 + Ax_1 = -2 + 2x_1; \quad M_{x_1=0} = -2 \text{ t}\cdot\text{m};$$

$$M_{x_1=a=3} = -2 + 2 \cdot 3 = 4 \text{ t}\cdot\text{m};$$

$$a \leq x_2 \leq a+b;$$

$$Q_{x_2} = A - q_1(x_2 - a) = 2 - 2(x_2 - 3); \quad Q_{x_2=a=3} = 2 \text{ t};$$

$$Q_{x_2=a+b=5} = 2 - 2 \cdot 2 = -2 \text{ t};$$

$$M_{x_2} = -M_1 + Ax_2 - q_1 \frac{(x_2 - a)^2}{2} = -2 + 2x_2 - (x_2 - 3)^2;$$

$$M_{x_2=a=3} = -2 + 6 = 4 \text{ t.m};$$

$$M_{x_2=a+b=5} = -2 + 2.5 - 2^2 = 4 \text{ t.m}.$$

$$Q_{x_2} = -2x_2 + 8 = 0 \quad \text{pour } x_2 = 4 \text{ m, donc } \max M_{x_2=4} =$$

$$= -2 + 2 \cdot 4 - 4 = 5 \text{ t.m.}$$

$$0 \leq x_3 \leq d; \quad Q_{x_3=0} = -6 \text{ t};$$

$$Q_{x_3=d=4} = -6 + 4 \cdot 4 = 10 \text{ t};$$

$$M_{x_3} = -M_1 + Bx_3 - q_2 \frac{x_3^2}{2} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2;$$

$$M_{x_3=0} = -2 \text{ t.m}; \quad M_{x_3=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 2 \cdot 4^2 = -10 \text{ t.m}.$$

$$Q_{x_3} = -6 + 4x_3 = 0 \quad \text{pour } x_3 = \frac{3}{2} \text{ m, donc } \max M_{x_3=\frac{3}{2}} =$$

$$= -2 + 6 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{9}{4} = 2.5 \text{ t.m};$$

$$d \leq x_4 \leq d + c;$$

$$Q_{x_4} = -B + q_2 d - P = -6 + 4 \cdot 4 - 12 = -2 \text{ t};$$

$$M_{x_4} = -M_1 + Bx_4 - q_2 d \left(x_4 - \frac{d}{2} \right) + P(x_4 - d) =$$

$$= -2 + 6x_4 - 16(x_4 - 2) + 12(x_4 - 4);$$

$$M_{x_4=d=4} = -2 + 6 \cdot 4 - 16 \cdot 2 = -10 \text{ t.m};$$

$$M_{x_4=d+c=5} = -2 + 6 \cdot 5 - 16 \cdot 3 + 12 \cdot 4 = -8 \text{ t.m}.$$

Nous trouvons les sections dans quelles :

$$M_{x_3} = -2 + 6x_3 - 2x_3^2 = 0; \quad x_3^2 - 3x_3 + 1 = 0;$$

$$x_3 = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.5 \pm 1.118;$$

$$x_{31} = 2,618 \text{ m}, \quad x_{32} = 0,382 \text{ m}.$$

D'après les valeurs ainsi obtenues on construit les diagrammes de Q et de M (fig. 54).

Exemple 27. Etant donné q , l , $P = 0,2$, ql (fig. 55); calculer la longueur avantageuse de la console a et construire les diagrammes de Q et de M .

Solution. On appelle *longueur avantageuse de la console d'une poutre* la longueur de la console pour laquelle le moment fléchissant maximal à la plus petite valeur possible. La longueur de la console avantageuse est déterminée par la condition d'égalité des valeurs absolues du moment fléchissant dans la section se trouvant sur l'appui (M_{app}) et du moment fléchissant maximal dans la travée de la

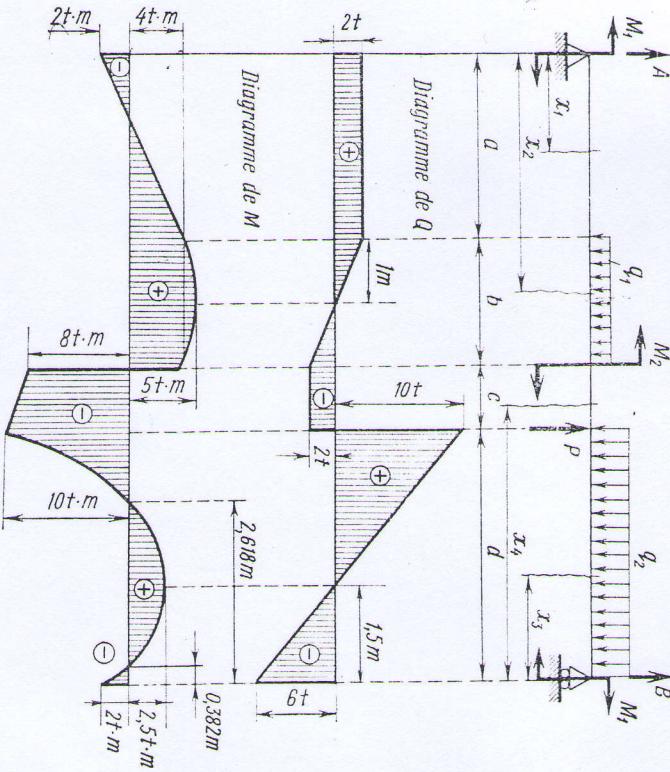


Fig. 54

poutre entre les appuis (M_{max}). Comme la barre est symétrique par rapport à la section moyenne, la valeur M_{max} dans la travée sera atteinte au milieu de la poutre et les valeurs des moments fléchissants dans les sections situées sur les appuis M_{app} seront identiques.

La condition de détermination de la longueur avantageuse de la console s'écrit: $|M_{\text{app}}| = |M|_{\text{max}}$. Déterminons ces moments. Les réactions aux appuis seront :

$$A = B = \frac{3}{2}P + \frac{ql}{2}; \quad M_{\text{app}} = -Pa - \frac{qa^2}{2};$$

$$M_{\text{max}} = -P \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} + A \frac{l-2a}{2} = -\frac{Pl}{2} - \frac{ql^2}{8} + \left(\frac{3}{2}P + \frac{ql}{2} \right) \frac{l-2a}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{ql^2}{2}.$$

Par condition, nous avons: $|M_{app}| = |M|_{max}$, i.e.

$$Pa + \frac{qa^2}{2} = \frac{Pl}{4} + \frac{ql^2}{8} - \frac{3Pa}{2} - \frac{ql^2}{2},$$

ou :

$$\frac{a^2}{l^2} + \left(\frac{5P}{ql} + 1 \right) \frac{a}{l} - \frac{1}{4} \left(\frac{2P}{ql} + 1 \right) = 0.$$

D'où :

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{5P}{ql} + 1 \right) + \sqrt{\left(\frac{5P}{ql} + 1 \right)^2 + \frac{2P}{ql} + 1} \right].$$

Le signe moins devant la racine est rejeté, car le rapport $\frac{a}{l}$ ne peut être une grandeur négative.

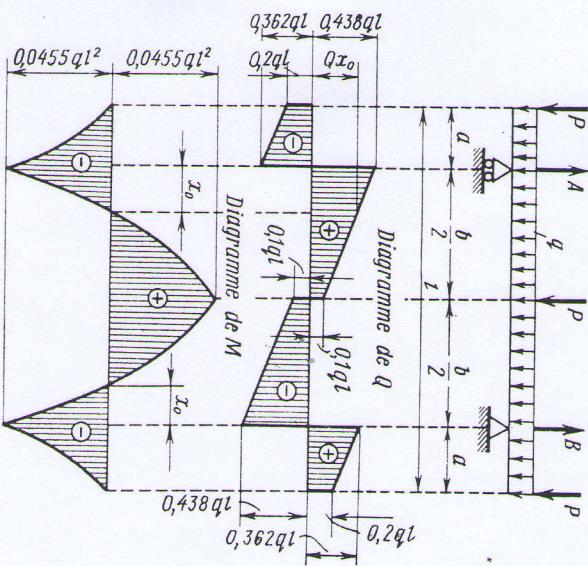


Fig. 55

Construisons les diagrammes de Q et M . Puisque $\frac{P}{ql} = 0,2$, on a :

$$a = \frac{\sqrt{54}-2}{2} l \approx 0,162l, \quad b = l - 2a \approx l(1 - 0,324) = 0,676l$$

et

$$A = B = \frac{3}{2}0,2ql + \frac{ql}{2} = 0,8ql.$$

Comme la charge répartie suivant la longueur de la poutre est uniforme, pour toutes les parties de la poutre le diagramme de Q

est linéaire et le diagramme de M parabolique. Puisque la poutre est symétrique, le diagramme de Q est antisymétrique et le diagramme de M symétrique.

Dans la section extrême gauche libre de la poutre $Q = -P = -0,2ql$.

Dans la section extrême droite de la console gauche nous avons :

$$Q = -P - qa \approx -(0,2 + 0,162)ql = -0,362ql.$$

Sur l'appui, en raison de la réaction A , le diagramme de Q a un saut de discontinuité. Par conséquent, à l'extrémité gauche de la travée de la poutre, entre les appuis :

$$Q = -0,362ql + 0,8ql = 0,438ql.$$

En s'approchant de la section moyenne de la poutre du côté gauche on obtient:

$$Q = -0,2ql + 0,8ql - 0,5ql = 0,1ql.$$

Avec les valeurs ainsi trouvées, on construit le diagramme de Q (fig. 55).

Dans la section extrême gauche libre de la poutre le moment fléchissant $M = 0$. Dans la section sur l'appui:

$$M_{app} \approx -0,2ql \cdot 0,162l - \frac{q}{2} (0,162l)^2 = -0,0455ql^2.$$

Au milieu de la poutre nous avons:

$$M_{max} = |M_{app}| = 0,0455ql^2.$$

La valeur de x_0 pour laquelle $M = 0$ dans la travée de la poutre est déterminée comme suit. La similitude de triangles implique:

$$\frac{Q_{x_0} - 0,1ql}{0,438ql - 0,1ql} = \frac{\frac{b}{2} - x_0}{\frac{b}{2}},$$

ou :

$$\frac{Q_{x_0} - 0,1ql}{0,338ql} = \frac{0,338l - x_0}{0,338l},$$

d'où :

$$Q_{x_0} = (0,438l - x_0)q.$$

L'aire trapézoïdale du diagramme de Q de hauteur x_0 est égale à la variation de M entre la section sur l'appui et la section à une distance x_0 de l'appui, c'est-à-dire :

$$\frac{0,438ql - Q_{x_0}}{2} \cdot x_0 = 0,0455ql^2,$$

ou :

$$(0,438l + 0,438l - x_0) x_0 = 0,091l^2,$$

d'où :

$$x_0^2 - 0,876lx_0 + 0,091l^2 = 0$$

et

$$x_0 = l(0,438 \pm \sqrt{0,438^2 - 0,091}) = l(0,438 \pm \sqrt{0,401}).$$

Puisque x_0 ne peut être plus grand que $\frac{b}{2} = 0,338l$, seule la racine $x_0 = l(0,438 - \sqrt{0,401}) \approx 0,422l$ donne la réponse au problème. D'après les valeurs ainsi trouvées on construit le diagramme de M (fig. 55).

Exemple 28. Etant donné : P et a (fig. 56, a), construire les diagrammes de Q et de M .

Solution. Puisque dans la section B passant par l'articulation suspendue le moment fléchissant est nul, la poutre peut être

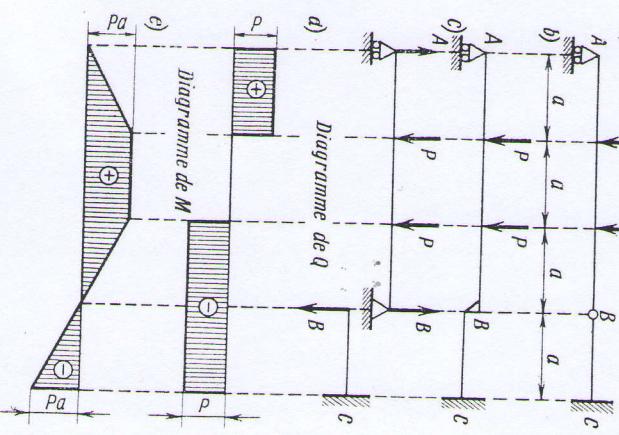


Fig. 56

représentée par deux poutres (fig. 56, b); la poutre-jetée gauche AB et la poutre console droite BC .

L'extrémité droite B de la poutre-jetée s'appuie sur l'extrémité gauche libre B de la console. Ces deux poutres peuvent être considérées séparément (fig. 56, c). Dans la poutre-jetée la réaction des appuis $A = B = P$.

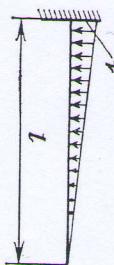
L'effet de la poutre-jetée sur la poutre console s'exprime par l'action d'une force concentrée $B = P$ agissant de haut en bas en son extrémité gauche.

Le problème se résout ensuite pour chaque poutre à part. Dans la partie gauche de la poutre-jetée $Q = A = P$. Dans la partie moyenne $Q = 0$ et dans la partie droite $Q = -P$. On a $Q = -P$ pour la console. Le diagramme de Q est représenté fig. 56, d.

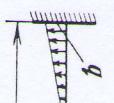
Dans les parties de la poutre où $Q = \text{const}$, le moment fléchissant varie linéairement, et pour la partie où $Q = 0$, $M = \text{const}$. Les variations de M dans les différentes parties sont aisément déterminées d'après les aires des diagrammes de Q . Le diagramme des moments fléchissants est représenté fig. 56, e.

Problèmes 222-270. Construire les diagrammes des efforts transversaux Q et des moments fléchissants M .

222



223



224



$$q_x = q \sin \frac{2\pi x}{l}$$

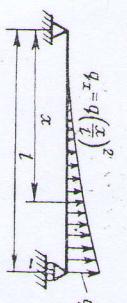
$$226 \quad \frac{m}{kgf \cdot cm}$$

$$225 \quad q_x = q \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

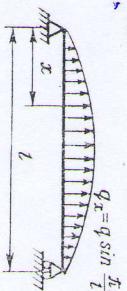


$$q_x = q \sin \frac{2\pi x}{l}$$

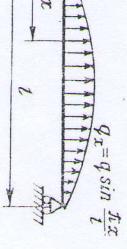
228



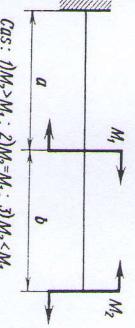
230



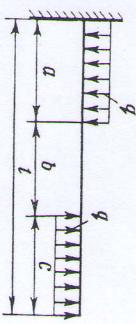
231



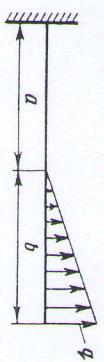
232

Cais: 1) $M_2 > M_1$; 2) $M_2 = M_1$; 3) $M_2 < M_1$

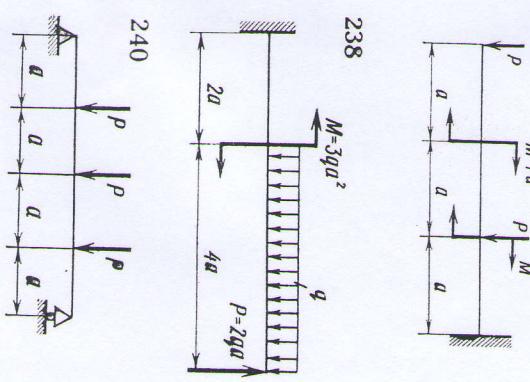
234

1) $a = b = c = \frac{l}{3}$; 2) $a = c = \frac{l}{2}$; $b = 0$

235



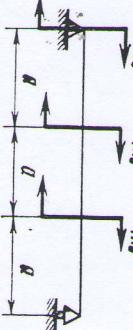
236

1) $a = b = c = \frac{l}{3}$; 2) $a = c = \frac{l}{2}$; $b = 0$

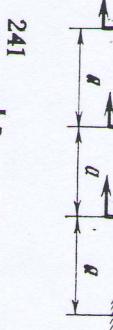
238

1) $P = 3qa^2$; 2) $P = 2qa$

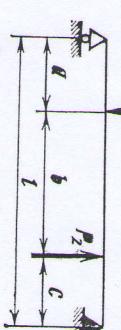
239

1) $P = 3qa$; 2) $P = 2qa$

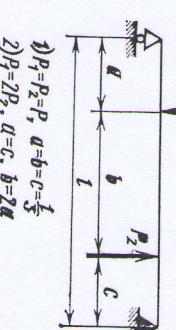
240

1) $P = 3qa^2$; 2) $P = 2qa$

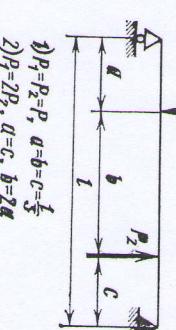
241

1) $P_1 = P_2 = P$; 2) $a = b = c = \frac{l}{3}$ 2) $P_1 = 2P_2$, $a = c$, $b = 2a$

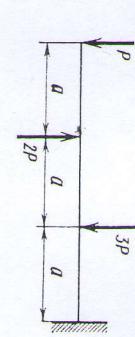
242

1) $P = 2t/m$; 2) $P = 4t/m$ 2) $P = 2t/m$, $a = \frac{l}{4}$, $b = \frac{3}{4}l$ 3) $a = \frac{3}{4}l$, $b = \frac{l}{4}$

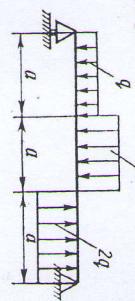
243

1) $q = 2t/m$; 2) $q = 4t/m$ 2) $q = 4t/m$, $a = \frac{l}{6}$, $b = \frac{5}{6}l$ 3) $a = \frac{5}{6}l$, $b = \frac{l}{6}$

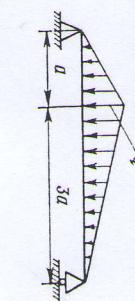
244



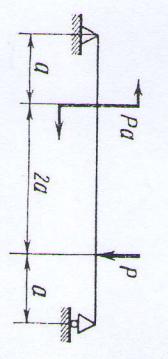
233



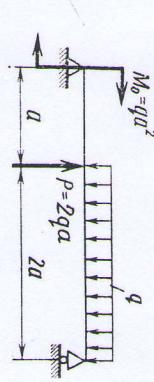
245



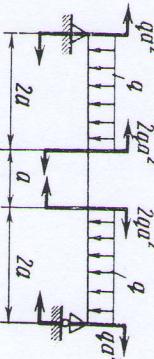
246



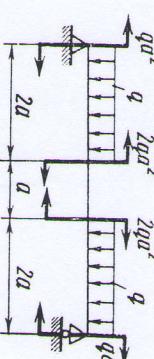
247



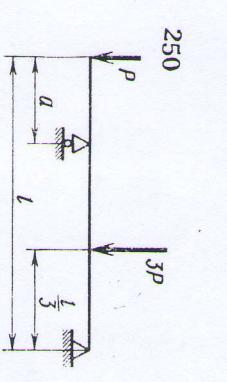
248



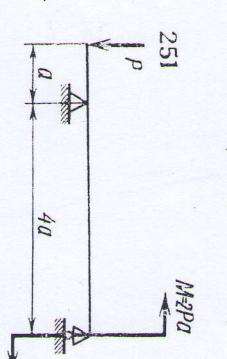
249



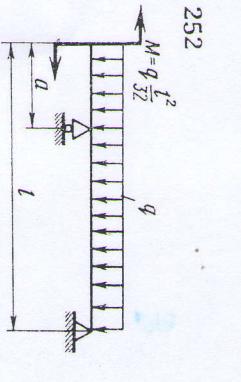
250



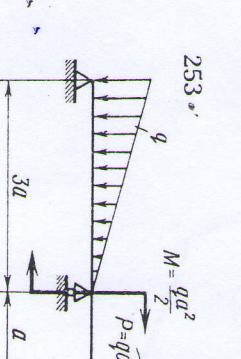
251



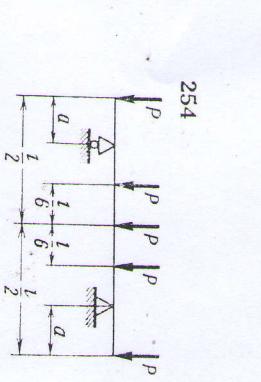
252



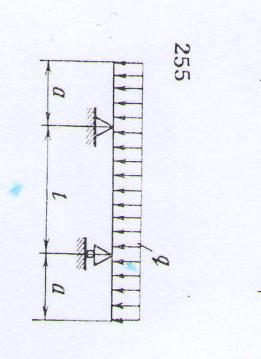
253



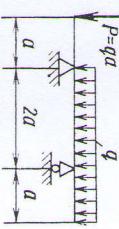
254



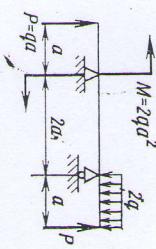
255



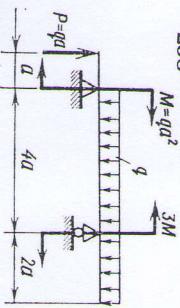
256



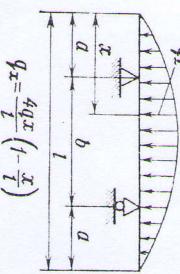
257



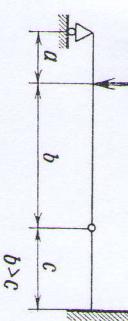
258



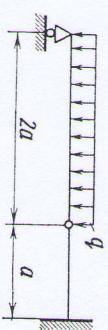
259



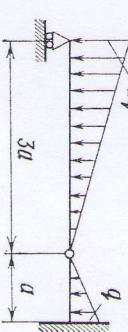
260



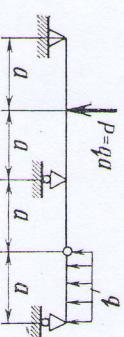
261



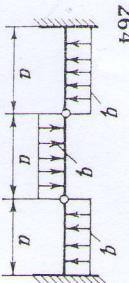
262



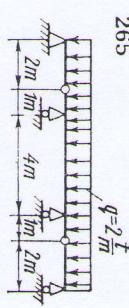
263



264



265



Réf : Resistance des matériaux
I. MIROLIOUBOV et autres

cote 620.11/1
32

La page suivante contiendra les solutions de quelques problèmes

Numéro du problème	Q_{\max}	M_{\max}	Numéro du problème	Q_{\max}	M_{\max}	Numéro du problème	Q_{\max}	M_{\max}
223	$\frac{q l}{4}$	$\frac{q l^2}{6}$	243	4 t	4 t · m	255	$\frac{q l}{2}$	$\frac{q l^2}{16}$
224*	$\frac{q l}{\pi}$	$\frac{q l^2}{2\pi}$	244	$\frac{3}{2} q a$	$\frac{17}{16} q a^2$		$\left(\text{pour } a = \frac{\sqrt{2}}{4} l \right)$	
225*	$\frac{q l}{3}$	$\frac{q l^2}{4}$	245	$\frac{7}{6} q a$	$\frac{5\sqrt{5}}{9} q a^2$	256	$\frac{5}{4} q a$	$q a^2$
227*	$\frac{q l}{12}$	$\frac{q l^2}{12\sqrt{3}}$	248	$q a$	$q a^2$	258	$2,25 q a$	$3,531 q a^2$
228*	$\frac{q l}{4}$	$\frac{\sqrt{2} q l^3}{32}$	249	$2 q a$	$q a^2$	259*	$0,21 q l$	$0,0128 q l^2$
229*	$\frac{q l}{\pi}$	$\frac{q l^2}{\pi^2}$	250	$2P$	$\frac{P l}{3}$	263	$\frac{3}{4} q a$	$\frac{q a^2}{2}$
230*	$\frac{q l}{2\pi}$	$\frac{q l^2}{4\pi^2}$	253	$q a$	$\frac{3}{2} q a^2$	264	$\frac{q a}{2}$	$\frac{q a^2}{8}$
242	$\frac{q b (l+a)}{2l}$	$\frac{q b^2 (l+a)^2}{8l^2}$	254	$\frac{3}{2} P$	$\frac{P l}{6}$	265	4 t	$3 t \cdot m$
						266	$q a$	$q a^2$
						267	P	Pa
						268	$q l$	$\frac{q l^2}{2}$
						269*	P	Pa
						270*	P	Pa

Remarque. Les diagrammes de Q et M sont donnés dans les réponses des problèmes marqués par un astérisque.

