

Exercice 1:

a) En utilisant la convention de sommation d'Einstein, écrire explicitement l'expression $M_{ijk} B^{ij}$ pour $n=3$.

b) Démontrer les identités suivantes: $a_{ij} x^i x^j = a_{ji} x^i x^j$,

$$(a_{ik} - a_{ki}) x^i x^k = 0$$

c) Démontrer qu'un déterminant d'ordre 3 peut s'écrire sous la forme: $\det[a_{ijk}] = \varepsilon^{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}$ où ε^{ijk} est

le symbol de permutation de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } ijk \text{ est une permutation paire} \\ -1 & \text{si } ijk \text{ " " " " " impaire.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2: Soit S un tenseur symétrique ($S_{ij} = S_{ji}$) d'ordre 2, et A un tenseur antisymétrique ($A_{ij} = -A_{ji}$) d'ordre 2. Montrer que le produit contracté $S_{ij} A^{ij}$ est nul.

Exercice 3: Soit, dans un plan, un repère orthonormé initial $R(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ et $R'(0, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ un nouveau repère défini par:

$$\vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \text{ en pose } \vec{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2), \vec{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$$

a) calculer les composantes covariantes g'_{ij} du tenseur métrique et les composantes contravariantes g'^{kl} .

b) Déterminer la base duale de $\vec{B}'$, notée $\vec{B}'^* \equiv (\vec{e}'^1, \vec{e}'^2)$, en calculant les composantes contravariantes de ces vecteurs dans $\vec{B}'$, puis dans $\vec{B}$.

Exercice 4: un point M est repéré en coordonnées cylindriques par les variables (ρ, φ, z) . L'expression du vecteur position $\vec{OM}$ s'écrit sur la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{OM} = \rho \cos \varphi \vec{i} + \rho \sin \varphi \vec{j} + z \vec{k}$$

- a) Déterminer les vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de la base naturelle et montrer qu'ils sont orthogonaux entre eux. Calculer les normes de ces vecteurs.
- b) Déterminer les composantes covariantes g_{ij} du tenseur métrique et écrire l'élément ds^2 en fonction des g_{ij} .

Exercice 5: on considère un espace vectoriel à trois dimensions.

Partant de la formule: $g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$

montrer que pour les vecteurs de base orthogonale

$$g^{ik} = \frac{1}{g_{ik}} \text{ lorsque } i=j$$