Université Mohamed Seddik Benyahia - Jijel Faculté des Sciences Exactes et Informatique Département de Physique	Examen Ondes Electromagnétiques Licence physique fondamentale Le 26 janvier 2020

Exercice 01 : Une onde électromagnétique plane dans le vide est définie par son champ électrique

$$\overrightarrow{E}(z,t) = E_1 \cos(kz - \omega t)\,\overrightarrow{i} + E_2 \cos(kz - \omega t)\,\overrightarrow{j}$$

Préciser le sens et la vitesse de propagation. Quelle est la nature de la polarisation de cette onde.

Exercice 02 *:* Dans le vide et en absence de courant, le champ électrique en un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'écrit

$$\overrightarrow{E} = \frac{E_0}{r} \exp\left[i\left(\omega t - k.r\right)\right]\ \overrightarrow{u}_\theta$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ où c est la vitesse de la lumière.

a) Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ associé.

b) Calculer la densité d'énergie de l'onde éléctromagnétique $U = \frac{\varepsilon_0 \overrightarrow{E}^2}{2} + \frac{\overrightarrow{B}^2}{2\mu_0}$. Comment varie U en fonction de r.

c) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\overrightarrow{S} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0}$. Quelle est l'orientation de ce vecteur ?

Exercice 03 *:* On considère un milieu électriquement neutre constitué de n ions (de charge $q = +e$) immobiles et n électrons (masse m,charge $q = -e$) supposés mobiles : quand on les écarte d'un vecteur $\overrightarrow{r}$ de leur position d'équilibre, ils sont rappelés vers elle par une force $(-m\omega_0^2 \overrightarrow{r})$.Quand il se meuvent à la vitesse $\overrightarrow{v}$, ils sont soumis à une force de frottement $(-m\nu \overrightarrow{v})$.

a) Si les électrons sont soumis à un champ sinusoidal $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_0} \exp(-i\omega t)$, ils prennent un mouvement d'oscillation forcé. Déterminer l'expression de la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$.

b) En déduire la conductivité $\gamma(\omega)$ du milieu sachant que les constantes du milieu sont ε_0 et μ_0 du vide.

c) On cherche à propager dans ce milieu une onde électromagnétique (EM) de la forme $\exp\left[i(kx - \omega t)\right]$, où k peut être un nombre complexe de la forme $k = k_1 + ik_2$. Calculer $k^2 = \tilde{\varepsilon} \mu_0 \omega^2$ où $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 + i\frac{\gamma}{\omega}$.

d) Donner l'expression de $(k_1^2 - k_2^2)$ et $(k_1 k_2)$ en fonction de ω, c, ω_0, ν et ω_p (avec $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$).

Bonne chance.

Université de Jijel - Dpt de physique le 26/01/2020

Solution de l'examen
ondes électromagnétiques

Exo1 (3pts) : Le sens de propagation : suivant les z croissants et une vitesse $v = \frac{w}{k}$ (1) (1)

polarisation : $E_x = E_1 \cos(kx - wt)$, $E_y = E_2 \cos(kx - wt)$

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{E_1}{E_2} \Rightarrow \boxed{E_x = \frac{E_1}{E_2} E_y}$$ polarisation rectiligne (1)

Exo2 (8pts) : $\vec{E} = \frac{E_0}{r} \exp[i(\omega t - k.r)].\vec{u_\theta}$

a) Calcul de $\vec{B}$: $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = -\int (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})\, dt$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u_r} & \vec{u_\theta} & \vec{u_\varphi} \\ (\vec{\nabla})_r & (\vec{\nabla})_\theta & (\vec{\nabla})_\varphi \\ 0 & E_\theta & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} \vec{u_\varphi} = \frac{E_0}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[e^{i(\omega t - k.r)} \right] \vec{u_\varphi}$$ (2)

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -ik \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - k.r)} \vec{u_\varphi}$$

$$\vec{B} = +ik \frac{E_0}{r} \left[\int e^{i(\omega t - kr)} dt \right] \vec{u_\varphi} = \boxed{\frac{k}{\omega} \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{u_\varphi}}$$ (1)

b) Densité d'énergie $U = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kr) + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kr)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \right] \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kr) = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 + \frac{1}{\mu_0 c^2} \right) \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kr)$$

$$\boxed{U = \varepsilon_0 \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kr)}$$ (2) , $U \propto \frac{1}{r^2} \cos^2(\omega t - kr)$ (0,5)

c) vecteur de Poynting : $\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} \frac{E_0^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kr) \vec{u_r}$

$\vec{S}$ est suivant $\vec{u_r}$ (direction de propagation de l'onde EM)

EXO3 (9 pts)

a) Equation du mvt $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -m\omega_0^2\vec{r} - m\nu\vec{v} - e\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (0,5)

Comme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ alors $\vec{r}$ est de la forme $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$ (0,5)

$\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -i\omega\vec{r}_0 e^{-i\omega t} = -i\omega\vec{r}$, $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\omega^2\vec{r}$

alors l'équation du mvt s'écrit: $(\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega)\vec{r} = -\frac{e}{m}\vec{E}$ (1)

et la vitesse $\boxed{\vec{v} = -i\omega\vec{r} = \frac{i\omega e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\nu)}\vec{E}}$ (1)

b) calculons la densité de courant

$$\vec{j} = nq\vec{v} = n(-e)\vec{v} = -i\frac{ne^2\omega}{m}(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\nu)^{-1}\vec{E}$$ (1)

alors la conductivité $\gamma(\omega)$ est:

$$\boxed{\gamma(\omega) = \frac{-ine^2\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega)}}$$ (1)

c) calcule de l'expression de la relation de dispersion:

$k^2 = \tilde{\varepsilon}\mu_0\omega^2$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0 + i\frac{\gamma}{\omega} = \varepsilon_0 + \frac{ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega)}$

$$\frac{k^2}{\omega^2} = \varepsilon_0\mu_0 + \frac{ne^2\mu_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega)} = \frac{1}{c^2}\left\{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\nu\omega}\right\}$$ (1)

avec $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}$

d) $k = k_1 + ik_2$, $k^2 = k_1^2 - k_1^2 + 2ik_1k_2$, par identification

on obtient:

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left\{1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2}\right\}$$ (1,5)

$$2k_1k_2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\omega_p^2\omega\nu}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\nu^2}$$ (1,5)