Université Mohammed Seddik BENYAHIA de Jijel
Faculté des Sciences Exactes et Informatique
Département de Mathématiques
Master 2 : Analyse Fonctionnelle
Module : Introduction à l'Analyse Multivoque
Pr. D. Azzam-Laouir

Examen
27/02/2021

Exercice n°1.

1) Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, E' son dual topologique. Donner la définition de la topologie faible sur E et la topologie faible* sur E'.

2) Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de H tel que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $(x_n)_n$ converge faiblement vers $x \in H$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = 1 - \|x\|^2.$$

Exercice n°2.

Soit $(A_n)_n \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = [-1 + (-1)^n, 0]$. Calculer $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$.

Exercice n°3.

1) Soient X, Y deux espaces toplogiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Donner la définition de la s.c.s et la s.c.i de F au point $x_0 \in X$.

2) Considérons la m-a $G : X \rightrightarrows Y$ définie par $G(x) = \overline{F(x)}$. Montrer que si F est s.c.i alors G est s.c.i.

3) Soit $F : [0,1] \rightrightarrows \mathbb{R}$ la multi-application définie par

$$F(x) = \begin{cases} \{x\} & si\ x \in [0,1[\\ [0,1] & si\ x = 1. \end{cases}$$

3.1) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que si $V \cap [0,1[= \emptyset$ alors $1 \notin V$.

3.2) Montrer que F est s.c.i sur $[0,1]$.

3.3) Calculer $F_+^{-1}(]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[)$, en déduire que F n'est pas s.c.s.

Exercice n°4.

Soit $\mathcal{L}([0,1])$ la tribu de Lebesgue sur $[0,1]$, et $\mathcal{B}([0,1])$ la tribu Borélienne.
Soit $g : ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit
$D \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ tel que $g^{-1}(D) \notin \mathcal{L}([0,1])$. Considérons les multi-appliactions

$$\begin{aligned} F:\ ([0,1], \mathcal{L}([0,1])) &\rightrightarrows \mathbb{R} \\ t &\longmapsto F(t) = \{g(t)\} \end{aligned}$$

et $H : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ définie par

$$H(t) = \begin{cases} \{1\} & si\ x \in D \\ \{0\} & si\ x \notin D. \end{cases}$$

1) Montrer que F et H sont mesurables.
2) Calculer $H \circ F$ et montrer qu'elle n'est pas mesurable.

N.B. $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$, et la tribu Borélienne est la plus petite tribu qui contient la topologie de l'espace.

Solution

Exercice n°1.

1) La topologie faible sur E est la topologie la moins fine sur E pour laquelle toutes les formes linéaires $(\varphi_f)_{f\in E'}$ sont continues, avec

$$\begin{array}{llll}\varphi_f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle.\end{array}$$

La topologie faible* sur E' est la topologie la moins fine sur E' pour laquelle toutes les formes linéaires $(J_x)_{x\in E}$ sont continues, avec

$$\begin{array}{llll}J_x: & E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & J_x(f) = \langle f, x\rangle.\end{array}$$

2) Nous avons

$$\|x_n - x\|^2 = \langle x_n - x, x_n - x\rangle = \|x_n\|^2 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 = 1 - 2\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2. \quad (1)$$

Comme (x_n) converge faiblement vers x dans H, alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall y \in H,$$

en particulier pour $y = x$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

En remplaçant dans (1), il vient que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|^2 = 1 - \|x\|^2.$$

Exercice n°2.

$$A_n = [-1 + (-1)^n, 0] \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \bigcup_{n\geq 0}\Big(\bigcap_{k\geq n} A_k\Big) = \Big(\bigcap_{k\geq 0} A_k\Big)\bigcup\Big(\bigcap_{k\geq 1} A_k\Big)\bigcup\Big(\bigcap_{k\geq 2} A_k\Big)\bigcup\cdots \\ &= (\{0\}\cap[-2,0])\cup(\{0\}\cap[-2,0])\cup(\{0\}\cap[-2,0])\cup\cdots = \{0\}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \bigcap_{n\geq 0}\Big(\overline{\bigcup_{k\geq n} A_k}\Big) = \Big(\overline{\bigcup_{k\geq 0} A_k}\Big)\bigcap\Big(\overline{\bigcup_{k\geq 1} A_k}\Big)\bigcap\Big(\overline{\bigcup_{k\geq 2} A_k}\Big)\bigcap\cdots \\ &= (\{0\}\cup[-2,0])\cap(\{0\}\cup[-2,0])\cap(\{0\}\cup[-2,0])\cap\cdots = [-2,0].\end{aligned}$$

Exercice n°3.
1) F s.c.s au point $x_0 \in X \iff \forall V$ ouvert de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $\forall x \in \Omega$, $F(x) \subset V$.
F s.c.i au point $x_0 \in X \iff \forall V$ ouvert de Y tel que $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$, il existe un voisinage Ω de x_0 tel que $\forall x \in \Omega$, $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

G s.c.i $\iff \forall V$ ouvert de Y, $G^{-1}(V)$ est un ouvert de X. Nous avons

$$\begin{aligned} G^{-1}(V) &= \big\{x \in X :\ G(x) \cap V \neq \emptyset\big\} = \big\{x \in X :\ \overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset\big\} \\ &= \big\{x \in X :\ F(x) \cap V \neq \emptyset\big\} = F^{-1}(V), \end{aligned}$$

comme F est s.c.i, alors $F^{-1}(V)$ est un ouvert de Y, ceci montre que $G^{-1}(V)$ est un ouvert de Y, et par suite G est s.c.i. Il reste à montrer que effectivement

$$\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset \iff F(x) \cap V \neq \emptyset.$$

Si $F(x) \cap V \neq \emptyset$ alors $\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset$ car $F(x) \subset \overline{F(x)}$.
Inversement,

$$\overline{F(x)} \cap V \neq \emptyset \iff \exists\, y \in \overline{F(x)} \text{ et } y \in V$$

$$y \in \overline{F(x)} \iff \forall W \in \mathcal{V}(y), \quad F(x) \cap W \neq \emptyset,$$

en particulier pour $W = V \in \mathcal{V}(y)$ (car V est un ouvert contenant y), on obtient $F(x) \cap V \neq \emptyset$.

3)
3.1) Supposons que $V \cap [0,1[= \emptyset$ et $1 \in V$. Comme V est un ouvert, ceci implique que $V \in \mathcal{V}(1)$, d'où il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V$, ce qui est en contradiction avec $V \cap [0,1[= \emptyset$, et donc $1 \notin V$.
3.2) Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F^{-1}(V) &= \big\{x \in [0,1] :\ F(x) \cap V \neq \emptyset\big\} \\ &= \big\{x \in [0,1[:\ x \in V\big\} \cup \big\{x = 1 :\ [0,1] \cap V \neq \emptyset\big\} \\ &= ([0,1[\cap V) \cup \big\{x = 1 :\ [0,1] \cap V \neq \emptyset\big\} \end{aligned}$$

Si $[0,1[\cap V = \emptyset \Longrightarrow 1 \notin V \Longrightarrow F^{-1}(V) = \emptyset$ ouvert de $[0,1]$.
Si $[0,1[\cap V \neq \emptyset$ et $1 \in V \Longrightarrow F^{-1}(V) = ([0,1[\cap V) \cup \{1\} = [0,1]$ ouvert de $[0,1]$.
Si $[0,1[\cap V \neq \emptyset$ et $1 \notin V \Longrightarrow F^{-1}(V) = ([0,1[\cap V) \cup \{1\} = [0,1] \cap (V \cup \{1\})$ qui n'est pas forcément un ouvert de $[0,1]$. Donc F n'est pas s.c.i.

3.3)

$$\begin{aligned} F_+^{-1}\Big(\Big]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big[\Big) &= \Big\{x \in [0,1] :\ F(x) \subset \Big]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big[\Big\} \\ &= \Big\{x \in [0,1[:\ x \in \Big]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big[\Big\} \cup \Big\{x = 1 :\ [0,1] \subset \Big]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\Big[\Big\} \\ &= \Big[0, \frac{1}{2}\Big[\cup \emptyset = \Big[0, \frac{1}{2}\Big[\end{aligned}$$

qui est un ouvert de $[0,1]$. Donc on ne peut pas déduire que F n'est pas s.c.s.

Exercice n°4.

F est mesurable si pour tout ouvert V de $\mathbb{R}$, $F^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1])$.
Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. On a $F^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. Comme g est continue, alors $g^{-1}(V)$ est un ouvert de $[0,1]$, et donc $g^{-1}(V) \in \mathcal{B}([0,1]) \subset \mathcal{L}([0,1]) \Longrightarrow F^{-1}(V) \in \mathcal{L}([0,1])$.
D'où F est mesurable.
Montrons maintenant que H est mesurable. Nous avons

$$H^{-1}(V) = \big\{t \in \mathbb{R} :\ H(t) \cap V \neq \emptyset\big\} = \big\{t \in D :\ 1 \in V\big\} \cup \big\{t \in C_{\mathbb{R}}^{D} :\ 0 \in V\big\}.$$

Si $\{0,1\} \subset V \Longrightarrow H^{-1}(V) = \mathbb{R} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Si $1 \in V$ et $0 \notin V \Longrightarrow H^{-1}(V) = D \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Si $1 \notin V$ et $0 \in V \Longrightarrow H^{-1}(V) = C_{\mathbb{R}}^{D} \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Si $1 \notin V$ et $0 \notin V \Longrightarrow H^{-1}(V) = \emptyset \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.
Donc H est mesurable.

2) Nous avons

$$\begin{array}{rcl} H \circ F :\ [0,1] & \rightrightarrows & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (H \circ F)(t) = H(F(t)) = H(g(t)) \end{array}$$

tel que

$$H(g(t)) = \begin{cases} \{1\} & si\ g(t) \in D \\ \{0\} & si\ g(t) \notin D, \end{cases}$$

c'est à dire

$$(H \circ F)(t) = \begin{cases} \{1\} & si\ t \in g^{-1}(D) \\ \{0\} & si\ t \notin g^{-1}(D). \end{cases}$$

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$. Nous avons

$$\begin{aligned} (H \circ F)^{-1}(V) &= \big\{t \in [0,1] :\ (H \circ F)(t) \cap V \neq \emptyset\big\} \\ &= \big\{t \in g^{-1}(D) :\ 1 \in V\big\} \cup \big\{t \in C_{[0,1]}^{g^{-1}(D)} :\ 0 \in V\big\}. \end{aligned}$$

Si $0 \notin V$ et $1 \in V \Longrightarrow (H \circ F)^{-1}(V) = g^{-1}(D) \notin \mathcal{L}([0,1])$. Donc $H \circ F$ n'est pas mesurable.