

Examen I.V

Exo 1: On définit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par
 $x \mapsto f(x) := \max(x, x^2)$.

1. Calculer le sous-différentiel de f pour tout $x \in \mathbb{R}$
i.e. $\partial f(x); x \in \mathbb{R}$.
2. Tracer les graphes $(x, f(x))$ et $(x, \partial f(x))$.

Exo 2: Soient C_1 et C_2 deux convexes non vides de $\mathbb{R}^n$ et $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in C_1 \times C_2$. Montrez les deux propriétés du cône normal suivantes:

- 1) $N_{C_1 \times C_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = N_{C_1}(\bar{x}_1) \times N_{C_2}(\bar{x}_2)$,
- 2) $N_{C_1 + C_2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = N_{C_1}(\bar{x}_1) \cap N_{C_2}(\bar{x}_2)$.

Exo 3:

Soient $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $C := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$ supposé non vide. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $\text{proj}_{C_k}(x)$ est un élément du Compact $B := \left\{ u \in \mathbb{R}^n : \|u - x\| \leq d_C(x) \right\}$

2) Considérons une sous-suite de $(\text{proj}_{C_k}(x))_{k \in \mathbb{N}}$ notée encore $(\text{proj}_{C_k}(x))_k$ qui converge vers $\bar{u} \in B$. Montrer que $\bar{u} \in C_k \forall k \in \mathbb{N}$.

3) Dédurre que $\text{proj}_{C_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \text{proj}_C(x)$ et

$$d_{C_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} d_C(x).$$

EX1: 06 pts

EX2: 05 pts

EX3: 09 pts

Responsable: Pr. Tahar Hadddar