

Le corrigé d'examen II

Ex 1:

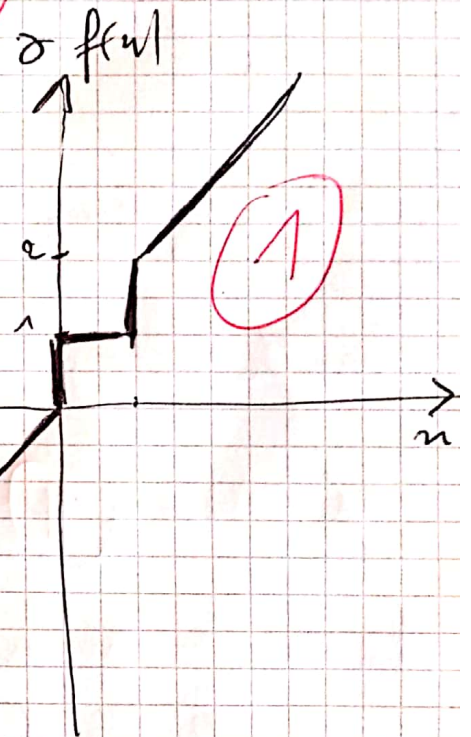
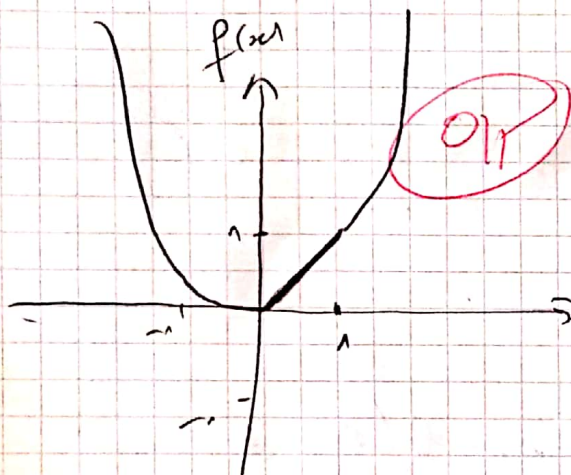
$$x \in]-\infty, 0[; \partial f(x) = 2x \quad (0,1)$$

$$x = 0 ; \partial f(0) = [0, 1] \quad (0,1)$$

$$x \in]0, 1[; \partial f(x) = 1 \quad (0,1)$$

$$x = 1 ; \partial f(1) = [1, 2] \quad (0,1)$$

$$x \in]1, +\infty[; \partial f(x) = 2x \quad (0,1)$$



Ex 03:

Voir le cours

1)

2)

EX 2:

1) $\text{proj}_{C_k}(x) \in B, \forall k \in \mathbb{N}.$

On a $\|\text{proj}_{C_k}(x) - u\| = \inf_{z \in C_k} \|z - x\|$ (0.11)

Comme $C_0 = \bigcap_k C_k \subset C_k, \forall k$ alors (0.11)

$\inf_{z \in C_k} \|z - x\| \leq \inf_{z \in C_0} \|z - x\| = d_1(x)$

i.e., $\text{proj}_{C_k}(x) \in B, \forall k.$

2) On suppose que $\text{proj}_{C_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{u} \in B$ et montrons que $\bar{u} \in C_k, \forall k.$

On raisonne par l'absurde :

~~On~~ On suppose qu'il existe un certain rang k_0 tel que $\bar{u} \notin C_{k_0}$.

Donc comme $(C_k) \downarrow$ alors :

$C_{k+1} \subset C_k, \forall k, \text{ i.e.,}$

$\dots \subset C_{k_0+2} \subset C_{k_0+1} \subset C_{k_0} \subset C_{k_0-1} \subset \dots$ or

on a $\text{proj}_{C_k}(x) \rightarrow \bar{u}$ alors

$$\|\bar{u} - u\| \leq d_C(x) \quad \text{--- (1)}$$

donc $\bar{u}$ ne pourrait pas être limite
d'une sous-suite de $\{\text{proj}_{C_k}(x)\}$
d'où la contradiction.

Donc $\bar{u} \in C_k$; $\forall k$.

3) Comme $\bar{u} \in C_k, \forall k \Rightarrow \bar{u} \in \bigcap_k C_k = C$

$$\text{i.e.} : \|\bar{u} - u\| \geq d_C(x) = \inf_{z \in C} \|x - z\|$$

En résumé ; $\bar{u} \in C$ et $\|\bar{u} - u\| = d_C(x)$

Alors $\bar{u} = \text{proj}_C(x)$ or

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{proj}_{C_k}(x) = \text{proj}_C(x)$$

Comme conséquence

$$d_{C_k}(x) = \|x - \text{proj}_{C_k}(x)\| \rightarrow \|x - \text{proj}_C(x)\| = d_C(x)$$