Les espaces de Lebesgue $\mathbb{L}^p$

Introduction

Nous allons définir une échelle d'espaces de Lebesgue qui jouent un rôle important en analyse fonctionnelle, en théorie des équations aux dérivées partielles et en probabilité. Tous les espaces mesurés considérés ici seront des espace mesurés complets.

1 L'espace de Lebesgue des fonctions intégrables

1.1 L'espace $\mathbb{L}^1(X;\mathcal{T};\mu)$

Soit $(X,\mathcal{T},\mu)$ espace mesuré complet. D'après les résultats précédents, si $f,g : X \longrightarrow \overline{R}$ sont deux fonctions $\mu-$intégrables sur X et si $f = g\mu-$p.p. sur X, on a $\int_X fd\mu = \int_X gd\mu$. Comme on l'a vu, la mesure μ étant complète, on peut modifier arbitrairement une fonction mesurable sur un ensemble négligeable sans changer sa mesurabilité, ni son intégrale lorsqu'elle est $\mu-$intégrable. Cela nous permet de travailler avec des fonctions $\mathcal{T}-$mesurables définies $\mu-$presque partout sur X. En effet, il arrive souvent que les fonctions mesurables que l'on obtient par diverses constructions ne soient définies que $\mu-$presque partout sur X. On pourra alors étendre f par la valeur 0 sur son ensemble d'indetermination de f.
On peut également définir les notions de mesurabilité et d'intégrabilité pour les fonctions à valeurs complexes, en considérant les parties réelles et imaginaires. D'une façon plus précise, une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{T}-$mesurable (resp. $\mu-$intégrable) sur X si les fonctions à valeurs réelles $\Re f$ et $\Im f$ sont $\mathcal{T}-$mesurables (resp. $\mu-$intégrables) sur X. Dans ce cas on

définit l'intégrale de f comme le nombre complexe

$$\int_X f d\mu = \int_X \Re f d\mu + i \int_X \Im f d\mu.$$

On montre facilement que $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ est $\mu-$intégrable sur X si et seulement si $|f| = \sqrt{(\Re f)^2 + (\Im f)^2}$ est $\mu-$intégrable sur X et l'on a

$$|\int_X f d\mu| \leq \int_X |f| d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X; \mathcal{T}; \mu)$ l'ensemble des fonctions définies $\mu-$p.p. et $\mu-$intégrables sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$. On souhaiterait définir une structure d'espace vectoriel sur l'espace $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. Malheureusement l'addition n'est pas bien définie en raison des ensembles d'indéterminations qui dépendent des fonctions considérés. C'est une des raisons pour lesquelles, on considère l'espace obtenu en identifiant toutes les fonctions définies presque partout et égale $\mu-$p.p. sur X.

Definition 1.1 *On considère la relation suivante sur l'espace* $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X; \mathcal{T}; \mu)$*:*

$$f \sim_\mu g \Longleftrightarrow f = g \ \mu - p.p. \ sur \ \ X.$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X; \mathcal{T}; \mu)$. L'espace qui nous intéresse est l'ensemble des classes déquivalence que l'on notera

$$\mathbb{L}^1_K(X; \mathcal{T}; \mu) := \mathcal{L}^1_K(X; \mathcal{T}; \mu) / \sim_\mu .$$

Cet ensemble quotient est appelé l'espace de Lebesgue des (classes de) fonctions $\mu-$intégrables sur X. Un élément $F \in \mathbb{L}^1_K(X; \mathcal{T}; \mu)$ est une classe d'équivalence de fonctions $\mu-$intégrables et coincidant $\mu-$p.p. sur X. Chaque classe F admet un représentant f défini et $\mu-$intégrable sur X et on note $F = [f] = \dot{f}$. On définit alors l'intégrale de la classe $F \in \mathbb{L}^1_K(X; \mathcal{T}; \mu)$ par

$$\int_X F d\mu = \int_X f d\mu \tag{1.1.1}$$

La formule (1.1.1) définit sans ambiguité un nombre réel ou complexe, puisque le second membre de (1.1.1) ne dépend que de la classe F et non du représentant $f \in \mathbb{L}^1_K(X, \mathcal{T}, \mu)$ choisi dans la classe F. Nous allons voir que sur l'espace $\mathbb{L}^1_K(X, \mathcal{T}, \mu)$ on peut toujours définir l'addition. En effet soit $f : X \longrightarrow$ est une fonction $\mu-$intégrable sur X, on peut lui associer une fonction définie sur X valeurs réelles en posant $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $f(x)$ est bien défini et $\tilde{f}(x) = 0$ sinon. Il est clair que $\tilde{f}$ est mesurable sur X et ne prend que des valeurs réelles. De plus on a$\tilde{f} = f$ $\mu-$p.p. sur X et donc$\tilde{f}$ est $\mu-$intégrable sur X de sorte que$[\tilde{f}] = [f]$.

On définit alors la somme de deux (classes de) fonctions $[f],[g] \in \mathbb{L}^1(X,\mathcal{T},\mu)$ en posant

$$[f]+[g] := [\tilde{f}+\tilde{g}].$$

Par définition $\tilde{f}+\tilde{g}$ est bien définie sur X et on a $\tilde{f}=f$ $\mu-$p.p. sur X et $\tilde{g}=g$ $\mu-$p.p. sur X.Montrons que cette définition ne dépend pas des représentants choisis. En effet si $f_1 \in [F]$ et $g_1 \in [g]$ on a également $\tilde{f_1}=f_1=f$ $\mu-$p.p. sur Xet $\tilde{g}_1=g_1=g$ $\mu-$p.p. sur X. Par suite $\tilde{f_1}+\tilde{g}_1=\tilde{f}+\tilde{g}$ $\mu-$p.p. sur X ce qui prouve que $[\tilde{f}+\tilde{g}]=[\tilde{f_1}+\tilde{g}_1]$.

Proposition 1.2 *L'espace* $\mathbb{L}^1(X,\mathcal{T},\mu;K)$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *si* $K=\mathbb{R}$ *(resp. sur* $\mathbb{C}$ *si* $K=\mathbb{C}$*) et l'intégrale* $F=[f] \longmapsto \int_X f d\mu$ *est une forme linéaire sur* $\mathbb{L}^1(X,\mathcal{T},\mu;K)$*. De plus en posant*

$$\|\dot{f}\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

pour $\dot{f}=[f] \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$*, on définit une* $\mathbb{K}-$*norme sur* $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$*.*

Dans la suite on identifera souvent une classe $\dot{f} \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$ à l'un de ses représentants f qui est une fonctions bien définie partout sur X et $\mu-$intégrable sur X.

Theorem 1.3 *L'espace vectoriel* $\mathbb{L}^1_K(X,\mathcal{T},\mu)$ *muni de la norme* $\|.\|$ *est un* $\mathbb{K}-$*espace de Banach.*

Démonstration: Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l'espace normé $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$. En désignant pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par f_n un représentant de la classe F_n bien défini sur X à valeurs dans $\mathbb{K}-$, on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers (p_k) telle que

$$\text{(1.1.2)} \qquad \|f_n - f_m\|_1 \leq 2^{-k-1}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq m \geq p_k.$$

On définit une suite de fonctions intégrables g_k en posant $g_0 := f_{p_0}, \dots, g_k := f_{p_{k+1}} - f_{p_k}$ pour $k \geq 0$. D'après l'inégalité (3.4.1), en posant $g := \sum_{j=0}^{+\infty} |g_j|$ et en appliquant le théorème de la convergence monotone, on obtient l'inégalité suivante:

$$\int_X g d\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_X |g_j| d\mu \leq 1.$$

Il en résulte que la fonction g est $\mu-$intégrable sur X et que la série de fonctions $\sum_{j=0}^{+\infty} g_j$ converge $\mu-$p.p. sur X vers une fonction $\mu-$intégrable $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$. Comme $f_{p_k} = (\sum_{i=0}^{k} g_i)$ pour tout k, il en résulte que la suite f_{p_k} $\mu-$presque partout vers f sur X et que $|f_{p_k}| \leq g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la convergence dominée, il en résulte que la suite (f_{p_k}) converge vers f dans $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$. Ainsi la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente dans l'espace normé

$\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$. Il en résulte facilement que la suite elle-même est convergente.
▶
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions $\mu-$intégrables sur X converge en moyenne vers une fonction $\mu-$intégrable f sur X si $\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_1=0$ i.e. la suite $(\dot{f}_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\dot{f}$ dans l'espace normé $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$.

Comme corollaire de la preuve précédente, on obtient le résultat suivant.

Proposition 1.4 *Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions $\mu-$intégrables sur X qui converge en moyenne, alors $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge $\mu-$p.p. sur X.*

2 Définition des espaces $\mathbb{L}^p$

Soit $p>0$ un nombre réel. Si $f: X\longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) une fonction mesurable on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{2.0.3}$$

En général $\|f\|_p\leq+\infty$. On notera $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$ l'espace des fonctions mesurables $f: X\longrightarrow\mathbb{K}$ telles que $\|f\|_p<+\infty$, i.e. $|f|^p$ est $\mu-$intégrable sur X.
Pour une fonction mesurable $f: X\longrightarrow\mathbb{K}$, on définit la borne essentielle de f comme la borne inférieure $\mu-\mathrm{supess}_X|f|$ des nombres réels $\alpha>0$ tels que $|f|\leq\alpha$, $\mu-$p.p. sur X, s'il existe au moins un tel α et $\mu-\mathrm{supess}_X|f|=+\infty$ sinon.

On définit ensuite $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$ comme l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées sur X i.e. $\mu-\mathrm{supess}_X|f|<+\infty$, ce qui signifie qu'il existe un ensemble $N\subset X$ $\mu-$négligeable tel que f soit bornée sur $X\setminus N$. Pour $f\in\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$, on pose

$$\|f\|_\infty := \mu-\mathrm{supess}_X|f|. \tag{2.0.4}$$

Alors si $f\in\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)$, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un ensemble $\mu-$négligeable $E\subset X$ tel que $|f|\leq\|f\|_\infty+\varepsilon$ sur $X\subset E$. On en déduit que $|f|\leq\|f\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X.
Observons que si $f\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu), \|f\|_p=0$ ssi $f=0\mu-$p.p. sur X.

Pour obtenir des espaces normés, on considère les espaces quotients

$$\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu):=\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X,\mathcal{T},\mu)/\sim_\mu,$$

où $\sim_\mu$ est la relation d'équivalence définie par légalité sur sur X modulo un ensemble $\mu-$négligeable. Il est alors clair que si $F=[f]\in\mathbb{L}\mathbb{K}^p(X,\mathcal{T},\mu)(0<p\leq\infty)$, le nombre réel $\|f\|_p$ défini par la formule (2.0.3) lorsque $0<p<\infty$ et par (2.0.4) est indépendant du représentant f de F choisi et définit donc un nombre réel que l'on notera $\|F\|_p$.
Commençons par démontrer que ce sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

Proposition 2.1 *Pour tout exposant* $0 < p \leq \infty$, $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ *est un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel.*

Démonstration: Il est clair que ces espaces sont stables par multiplication par un scalaire. Il reste à montrer qu'ils sont stables par l'addition. Si $p = \infty$ et si $f, g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ sont des représentants à valeurs finies, on a $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X et $|g| \leq \|g\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X. Il en résulte que $f+g$ est mesurable et $|f+g| \leq |f|+|g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X. Par suite $f+g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $\|f+g\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Supposons que $0 < p < 1$, alors par concavité de la fonction $t \longmapsto t^p$ sur $[0, +\infty[$ on a l'inégalité $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ pour $a, b \in \mathbb{R}^+$. Par suite si $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ sont des représentants à valeurs finies, on a $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq |f|^p + |g|^p$ sur X, ce qui prouve que $f+g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$.
Supposons maintenant que $1 \leq p\infty$. Alors la convexité de la fonction $t \longmapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$ implique l'inégalité

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \forall a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Il en résulte que $|f+g|^p \leq (|f|+|g|)^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$ sur X, ce qui prouve que $f+g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. ▶
Le résultat suivant constitue une motivation pour les notations précédents.

Proposition 2.2 *Supposons que* $\mu(X) < +\infty$, *alors si* $0 < p_1 < p_2 < +\infty$, *on a*

$$\mathbb{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu) \subset \mathbb{L}^{p_2}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu) \subset \mathbb{L}^{p_1}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu).$$

De plus, pour tout $f \in \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$, *on a*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \to +\infty} \|f\|_p.$$

Démonstration: Soit $X_1 := \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}$ et $X_2 := \{x \in X : |f(x)| > 1\}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p d\mu &= \int_{X_1} |f|^{p_1} d\mu + \int_{X_2} |f|^{p_1} d\mu \\ &\leq \mu(X) + \int_{X_2} |f|^{p_2} d\mu \\ &\leq \mu(X) + \int_X |f|^{p_2} d\mu \end{aligned}$$

ce qui prouve la première inclusion. La seconde inclusion est évidente puisque si $M := \|f\|_\infty < +\infty$, on a $|f| \leq M, \mu-$p.p. sur X et donc $\|f\|_p \leq M\mu(X)^{1/p} < +\infty$.
Per ailleurs si $f \in \mathbb{L}^\infty_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $M := \|f\|_\infty$, on a d'après l'inégalité précédente

$$\limsup_{p \to +\infty} |f|_p \leq M = \|f\|_\infty.$$

D'autre part si $M' < M$, l'ensemble $A := \{x \in X; |f(x)| \geq M'\}$ est de mesure positive non nulle et pour tout $0 < p < +\infty$, on a

$$\|f\|_p \geq M'\mu(A)^{1/p}$$

ce qui à la limte prouve que

$$\liminf_{p \to +\infty} \|f\|_p \geq M'.$$

Comme $M' < M$ est arbitraire on obtient l'inégalité

$$\liminf_{p \to +\infty} \|f|_p \geq M$$

et le résultat voulu est démontré. ▶
Observons que l'hypothèse de finitude de la masse totale est essentielle: en effet si $X = [1, +\infty[$ muni de la mesure de Lebesgue λ, on $x \longmapsto x^{-1/p_1} \in \mathbb{L}^{p_2}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, \lambda)$ pour $0 < p_1 < p_2 < +\infty$ mais n'appartient pas à $\mathbb{L}^{p_1}_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{T}, \lambda)$; de même qu'une constante non nulle appartient à $\mathbb{L}^{\infty}(X, \mathcal{T}, \mu; \mathbb{K})$ mais n'appartient pas à $\mathbb{L}^{p}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \lambda))$ pour tout $0 < p < +\infty$.

3 Inégalités de convexité

3.1 Inégalité de Jensen

Rappelons que si $\chi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$\chi(t) \geq \chi(t_0) + a(t - t_0)$$

Theorem 3.1 *(Inégalité de Jensen). Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé i.e. $\mu(X) = 1$ et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{T}-$mesurable positive sur X. Soit $\chi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $f(X) \subset I$. Alors $\int_X f d\mu \in I$ et l'on a*

$$\chi(\int_X f d\mu) \leq \int_X \chi(f) d\mu.$$

Démonstration: D'après l'inégalité de convexité ci-dessus, on a

$$\int_X \chi(f) d\mu \geq \chi(t_0) + a(\int_X f d\mu - t_0).$$

Comme $\mu(X) = 1$, l'inégalité $a \leq f \leq b$ sur X, où $a, b \in \mathbb{R}$, implique $a \leq \int_X f d\mu \leq b$. Ce qui prouve que si $f(X) \subset I$ alors $\int_X f d\mu \in I$. On peut donc choisir $t_0 := \int f d\mu$ dans l'inégalité de convexité. Ce qui implique immédiatement l'inégalité de Jensen.▶

3.2 Inégalité de Hölder

Pour tout exposant réel $1 \leq p \leq +\infty$ on appelle exposant conjugué de p l'exposant réel q tel que $1/p + 1/q = 1$ i.e. $q = p/(p-1)$. Observons que $q = \infty$ si $p = 1$ et que $q = 2$ si $p = 2$.

Theorem 3.2 *(Inégalité de Hölder). Soient $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) des fonctions mesurables , alors on a*

$$\begin{aligned}
(3.2.1)\int_X |fg|d\mu &\leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |g|^q d\mu\Big)^{1/q} \text{ si } 1 < p < +\infty,\\
(3.2.2)\int_X |fg|d\mu &\leq (supess_X|g|)\int_X |f|d\mu
\end{aligned}$$

En particulier si $f, g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)(1 \leq p < +\infty)$, alors $f\bar{g} \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ et l'on a

$$(3.2.3) \qquad \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

De plus si $1 < p < +\infty$, on a égalité dans (3.2.3) ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tels que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ $\mu-$p.p. sur X.

Démonstration: La dernière inégalité correspondant au cas où $p = 1$ est évidente. Supposons maintenant que $1 < p < +\infty$. Alors $1 < q < +\infty$ et on a l'inégalité élémentaire suivante

$$(3.2.4) \qquad a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

dans laquelle il y a égalité est ssi $a^p = b^q$. Cette inégalité, connu sous le nom d'Inégalité de Young, equivaut à la relation suivante

$$\sup\{tb - t^p/p; t \in \mathbb{R}^+\} = b^q/q.$$

Il est facile de voir que la fonction $t \longmapsto tb - t^p/p$ atteint son maximum strict sur $\mathbb{R}^+$ au point $t_{\max} = b^{1/(p-1)}$ et que ce maximum est égal à b^q/q. On obtient alors l'inégalité (3.2.4) qui est une égalité ssi $a^p = b^q$.

Pour en déduire (3.2.3), on suppose d'abord que $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$. D'après l'inégalité (3.2.4) on a

$$|fg| \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}, \mu - \text{p.p.sur } X.$$

En intégrant cette inégalité, on obtient alors

$$\int_X |fg|d\mu \leq \int_X \frac{|f|^p}{p} d\mu + \int_X \frac{|g|^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Par ailleurs, l'inégalité (3.2.3) est évidente si $|f|_p = 0$ ou $|g|_q = 0$. Si $|f|_p > 0$ et $|g|_q > 0$ l'inégalité (3.2.3) découle du cas particulier appliqué aux fonctions

$f' := f/\|f\|_p$ et $g' := g/\|g\|_q$ qui vérifient $\|f'\|_p = \|g'\|_q = 1$. En examinant le cas d'égalité dans l'inégalité (3.2.4) on en déduit qu'il ya égalité dans (3.2.3) ssi $|f'|^p = |g'|^q \mu-$p.p. sur X, ce qui correspond à la condition donnée. ▶
Le cas particulier où $p = 2$ et $q = 2$ est classique.

Corollary 3.3 *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit $f, g \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$, alors $fg \in \mathbb{L}\mathbb{K}^1(X, \mathcal{T}, \mu)$ et*

$$\int |fg| d\mu \leq \Big(\int_X |f|^2 \Big)^{1/2} \Big(\int_X |g|^2 \Big)^{1/2}.$$

C'est un cas particulier de l'inégalté de Cauchy Schwarz bien connue associée ùne forme bilinéaire symétrique ou hermitienne positive. En effet l'inégalité de Hölder implique que l'application $\mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu) \ni (f, g) \longmapsto \int f\bar{g} d\mu$ est une forme bilinéaire symétrique lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. hermitienne lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) et positive sur le $\mathbb{K}-$espace vectoriel $\mathbb{L}^2(X, \mathcal{T}, \mu)$.

3.3 Inégalité de Minkowski

Nous savons que pour tout exposant $0 < p < \infty$, $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Nous allons montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur l'espace $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

Theorem 3.4 *(Inégalité de Minkowski). Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et $f, g : X \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions mesurables, alors on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Démonstration: Si $p = 1$ c'est évident. Si $p = +\infty$, on a $|f| \leq \|f\|_\infty \mu-$p.p. sur X et $|g| \leq \|g\|_\infty \mu-$p.p. sur X de sorte que $|f+g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \mu-$p.p. sur X et donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
Supposons maintenant que $1 < p < +\infty$. Comme l'inégalité est triviale si $\|f + g\|_p = 0$, on peut supposer que $\|f + g\|_p \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} \int_X |f + g|^p d\mu &= \int_X |f + g|^{p-1} |f + g| d\mu \\ &\leq \int_X |f + g|^{p-1} |f| d\mu + \int_X |f + g|^{p-1} |g| d\mu \end{aligned}$$

En appliquant sucessivement l'inégalité de H$\acute{}$older à $|f+g|^{p-1}$ avec l'exposant q et f avec l'exposant p, puis g avec l'exposant p, on obtient

$$\|f + g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p),$$

ce qui prouve l'inégalité voulue. ▶

Corollary 3.5 *Pour tout exposant* $1 \leq p \leq +\infty$*, la fonction* $\|.\|_p$ *définit une* $\mathbb{K}-$*norme sur le* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel* $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$.

Démonstration: Supposons d'abord que $p = +\infty$. Alors si $f, g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$, des fonctions à valeurs finies, alors on a $|f| \leq \|f\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X et $|g| \leq \|g\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X et donc $|f+g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ $\mu-$p.p. sur X. Il en résulte que $f + g \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$ et que $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Comme $\|\lambda f\|_\infty$ pour tout scalaire λ et tout $f \in \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$, il en résulte immédiatement que $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$ est un espace vectoriel et que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}$.
Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$. L'inégalité de Minkowski montre que $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace vectotiel réel et même complexe si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et que $\|.\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire. Les autres propriétés étant évidentes, il en résulte que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. ▶

Example 3.6 *Soit* A *un ensemble infini muni de la mesure de comptage* c *définie sur la tribu* $\mathcal{P}(A)$*. On sait que dans ce cas toute fonction* $u : A \longrightarrow \mathbb{K}$ *est mesurable et l'on a pour* $0 < p < \infty$*,*

$$\int_A |u|^p dc = \sum_{\alpha \in A} |u_\alpha|^p$$

Dans ce cas $L^p_{\mathbb{K}}(A, \mathcal{P}(A), c)$ *n'est autre que l'espace des familles de nombres réels ou complexes indéxées par* A *qui sont de puissance* $p^{\text{ième}}$ *absolument sommable que l'on note habituellement* $\ell^p_{\mathbb{K}}(A)$*. On obtient dans ce cas l'inégalité de Minkowski discrète bien connue: pour* $u, v \in \ell^p_{\mathbb{K}}(A)$*,*

$$\left(\sum_{\alpha \in A} |u_\alpha + v_\alpha|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{\alpha \in A} |u_\alpha|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\alpha \in A} |v_\alpha|^p\right)^{1/p}.$$

3.4 Le théorème de Riesz-Fischer

Nous allons démontrer le résultat fondamental suivant.

Theorem 3.7 *Pour tout exposant* $1 \leq p \leq +\infty$*, l'espace vectoriel normé* $(\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu), \|.\|_p)$ *est complet i.e. c'est un espace de Banach.*

Ce théoème a déja été démontré dans le cas $p = 1$. Pour $1 < p < +\infty$, on procède de la même façon en utilisant le résultat suivant.

Proposition 3.8 *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{L}^p_K(1 \leq p < +\infty$ *telle que* $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_p < +\infty$*. Alors la série de fonctions* $\sum_{n \geq 0} f_n$ *converge* $\mu-$*p.p. sur* X *et dans* $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}$*.*

Démonstration: Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\| \sum_{k=0}^{n} |f_n| \|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_n\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_n\|_p.$$

Il en résulte par le théorème de la convergence monotone que

$$\Big(\int_X (\sum_{k=0}^{+\infty} |f_n|)^p d\mu \Big)^{1/p} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|_p < +\infty.$$

Ce qui signifie que la fonction $\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} |f_n| \Big)^p$ est $\mu-$intégrable sur X donc finie $\mu-$p.p. sur X. Si g est la somme de la série $(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, la fonction g est alors définie $\mu-$p.p. sur X et définit un élément de $\mathbb{L}^p$. De plus $g - \sum_{k=0}^{n} f_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ et

$$\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \|_p \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_p$$

qui tend vers 0 avec $1/n$, ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{k \geq 0} f_k$ dans L^p. ▶

Démonstration du théorème: Soit Soit f_n une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. on peut trouver une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que

$$\|f_n - f_m\|_p \leq 2^{-k-1}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall n \geq m \geq n_k. \tag{3.4.1}$$

On définit une suite de fonctions mesurables g_k en posant $g_0 := f_{p_0}, \ldots, g_k := f_{p_{k+1}} - f_{p_k}$ pour $k \geq 0$. D'après l'inégalité (3.4.1), en posant $G_N := \sum_{j=0}^{N} |g_j|$ et en appliquant l'inégalité de Minkowski on obtient l'inégalité suivante:

$$\|G\|_p \leq \sum_{j=0}^{N} \|g_j\|_p \leq \sum_{j=0}^{N} 2^{-j-1} \leq 1.$$

Il en résulte que la fonction g est $\mu-$intégrable sur X et que la série de fonctions $\sum_{j=0}^{+\infty} g_j$ converge $\mu-$p.p. sur X vers une fonction $\mu-$intégrable $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. Comme $f_{p_k} = (\sum_{i=0}^{k} g_i)$ pour tout k, il en résulte que la suite f_{p_k} $\mu-$presque partout vers f sur X et que $|f_{p_k}| \leq g$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après le théorème de la convergence dominée, il en résulte que la suite (f_{p_k}) converge vers f dans $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. Ainsi la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente dans l'espace normé $\mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$. Il en résulte facilement que la suite elle-même est convergente. ▶

Un cas particlier important est celui où $p = 2$. Dans ce cas, la norme $\|.\|_2$ est associée à un produit scalaire. En effet, si $f, g \in \mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ d'après l'inégalité de Hölder, la fonction $f\overline{g}$ est intégrable sur X. On pose alors

$$(f|g) := \int_X f\overline{g} d\mu.$$

Il est clair que l'on définit ainsi un produit scalaire réel ou hermitien sur $\mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dont la norme associée est précisément $\|;\|_2$. L'espace $\mathbb{L}^2_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ est donc un espace de Hilbert.
Le résultat suivant est fondamental.

Proposition 3.9 *Soit $p > 1$ et $g \in \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$, où $1 \leq q < +\infty$ est l'exposant conjugué de p. Alors l'application $\Phi = \Phi_g : \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu) \ni f \longmapsto \int_X f\overline{g}d\mu$ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ de norme $\|g\|_q$. Autrement dit*

$$\|g\|_q = \sup\{|\int_X f\overline{g}d\mu|; \|f\|_p = 1\}.$$

Pour $p = 1$ (donc $q = +\infty$), le résultat reste vrai si μ est $\sigma-$finie.

Démonstration: L'inégalité de Hölder exprime précisément que Φ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ de norme $\leq \|g\|_q$. On peut supposer que $\|g\|_q \neq 0$. Pour démontrer l'égalité, on désigne par s la fonction définie par $s(t) := |t|/\overline{t}$ si $t \neq 0$ et $s(0) = 0$. Alors s est une fonction borelienne de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $s(t)\overline{t} = |t|$ et donc la fonction $s(g)$ est mesurable sur X et $s(g)\overline{g} = |g|$ sur X. Alors la fonction $h := s(g)\overline{g}$ est dans $\mathbb{L}^p$, puisque $|h|^p = |g|^q \in \mathbb{L}^1$. Par suite $\|h\|_p = \|g\|_q^{p/q}$ et l'on a

$$\|g\|_q^q = \int_X s(g)|g|^{q-1}\overline{g}d\mu = |\Phi(h)| \leq \|\Phi\|\|h\|_p,$$

ce qui prouve que que $\|\Phi\| \geq \|g\|_q^q\|h\|_p^{-1} = \|g\|_q^{q-q/p} = \|g\|_q$.
Si $p = \infty$, on a $|\Phi(s(g)) = \int_X |g|d\mu$, ce qui entraine immédiatement le révsultat. Pour traiter le cas $p = 1$, observons que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, l'ensemble $A := \{x \in X; |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$ est de mesure $\mu(A) > 0$. Comme μ est $\sigma-$finie il existe une suite croissante $(X_n)_{n\geq 0}$ d'ensembles mesurables telle que $X = \cup_{n\geq 0}X_n$ et $\mu(X_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(X \cap A)$, ce qui prouve qu'il existe $n \geq 1$ tel que $\mu(A \cap X_n) > 0$. Ainsi $B := A \cap X_n$ est un ensemble mesurable tel que $0 < \mu(B) < +\infty$ et $|g| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ sur B. Par conséquent

$$\mu(B)(\|g\|_\infty - \varepsilon) \leq \int_B |g|d\mu = \Phi(s(g)\chi_B) \leq \|\Phi\|\mu(B),$$

ce qui prouve que $\|\Phi\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ et comme $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, on en dévduit que $\|\Phi\| \geq \|g\|_\infty$, ce qui prouve le révsultat voulue. ▶
Si $q = 2$, on sait d'après le théorème de Riesz-Fischer que toute forme linévaire sur $\mathbb{L}^2$ est de la forme Φ_g pour un certain $g \in \mathbb{L}^2$.

On démontre que ce résultat est encore valable pour $1 \leq q < +\infty$. Autrement dit que $\mathbb{L}^q \ni g \longmapsto \Phi_g \in (\mathbb{L}^p)'$ est un isomorphisme isométrique de $\mathbb{L}^q$ sur l'espace dual $(\mathbb{L}^p)'$ de l'espace $\mathbb{L}^p$, d'où la terminologie d'exposant conjugué.

Remarque: Si $0 < p < 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ peut être muni d'une structure d'espace métrique complet en posant pour $f, g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$

$$d_p(f, g) := \int_X |f - g|^p d\mu.$$

L'inégalité élémentaire $(a + b)^p \leq a^p + b^p$ sur $\mathbb{R}^+$ montre que d_p satisfait à l'inégalité triangulaire et donc d_p est une distance sur $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ qui est en plus invariante par translation et absoluement homogène de degré p i.e. $d_p(f, g) = d_p(f - g, 0)$ et $d_p(cf, cg) = |c|^p d_p(f, g)$ pour tout $f, g \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $c \in \mathbb{K}$. ▶

4 Densité et continuité dans $\mathbb{L}^p$

Pour terminer nous allons démontrer un théoréme de densité qui est très utile dans la pratique. Obsrvons que pour une fonction étagée φ sur $X, \mathcal{T})$ on a $|\varphi|^p$ est intégrable si et seulement si φ est intégrable. Autrement dit $\mathcal{E}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu) = \mathcal{E}_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu) \cap \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu))$ pour tout $p > 0$.

Proposition 4.1 *Soit $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ $(1 \leq p < \infty)$. Alors il existe une suite de fonctions de fonctions étagées (φ_n) dans $\mathcal{E}^1_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$ qui converge vers f dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$.*

On peut supposer f à valeurs finies. On sait que toute fonction fonction mesurable positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives. Il en résulte qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions étagées qui converge vers f sur X et telle que $|\varphi_n| \leq |f|$ sur X. Alors $|f - \varphi_n|^p \leq 2^p |f|^p$ sur X. D'après le théorème de la convergence dominée, on en déduit que la suite (φ_n) converge vers f dans $\mathbb{L}^p$. ▶
On va en déduire le théorème d'approximation suivant.

Theorem 4.2 *Soit X un espace localement compact et μ une mesure de Borel régulière sur X. Alors pour tout $1 \leq p < \infty$, le sous espace $\mathcal{C}_0(X; \mathbb{K})$ des fonctions continues sur X à support compact est dense dans $\mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(X, \mathcal{T}, \mu)$.*

Démonstration: On se ramène au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. D'après le résultat précédent il suffit de montrer que si $A \in \mathcal{T}$ est de mesure finie, la fonction χ_A est limite au sens de $\mathbb{L}^p$ d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}_0(X; \mathbb{R})$. En effet soit $\varepsilon > 0$. La mesure μ étant régulière par hypothèse, il existe un compact K et un ouvert O de X tels que $K \subset A \subset O$ et $\mu(O \setminus K) \leq \varepsilon^p$. D'après le théorème de Tietze-Uryshon, il existe une fonction φ continue à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ sur $X \setminus O$. Si X est métrisable on peut prendre $\varphi(x) := d(x; X \setminus O)/(d(x; K) + d(x; X \setminus O))$ pour $x \in X$. Il en résulte que $|\chi_A - \varphi| \leq \chi_{O \setminus K}$ sur X et donc $\|\chi_A - \varphi\|_p \leq \mu(O \setminus K)^{1/p} \leq \varepsilon$. ▶
Nous allons en déduire le résultat suivant.

Theorem 4.3 *Soit* $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^m), 1 \leq p < \infty,$ *alors*

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0.$$

Autrement dit l'opérateur $\mathbb{R}^m \ni h \longmapsto \tau_h f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}^m)$ *est continue.*

Démonstration: Supposons d'abord que $f = \varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ et soit K le support de φ. Alors pour $x \in \mathbb{R}^m$ et $|h| \leq 1$, on a $|\varphi(x+h) - \varphi(x)|^p \leq 2^p \|\varphi\|_\infty^p \chi_{K_1}(x)$, où $K_1 := \{x \in \mathbb{R}^m; d(x; K) \leq 1\}$. Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^m$, elle est uniformément continue sur le compact K_1 et donc $|\tau_h \varphi - \varphi|^p$ converge vers 0 uniformément sur K_1 lorsque h tend vers 0, et par suite $|\tau_h \varphi - \varphi|^p$ tend vers 0 dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^m)$. Supposons maintenant que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{R}^m)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors d'après le théorème de densité précédent, il existe $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ telle que $\|f - \varphi\|_p \leq \varepsilon$. Alors pour $h \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p &\leq \|\tau_h f - \tau_h \varphi\|_p + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p + \|f - \varphi\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h \varphi - \varphi\|_p. \end{aligned}$$

Le résultat en découle d'après le premier cas.