Chapitre 1

Généralités sur les signaux

1. Introduction
2. Définition d'un signal
3. Caractéristiques des signaux
4. Classification des signaux
5. Signaux particuliers
6. Opérations sur les signaux
7. Energie et puissance des signaux
8. Notion de base sur les systèmes
9. Notion de bruit et rapport signal sur bruit

1. Introduction

Qu'es ce qu'un signal ?

Exemples de signaux au sens courant

- Signaux faits par la main ou le visage
- Le tonnerre
- L'éclair
- Les coups de phare
- Carton rouge ou jaune

Le point commun entre tous ces exemples est que chaque signal émet une information.

Signal (Larousse)

Tout signe, geste, cri, son,…etc destiné à avertir, donner une consigne ou un ordre.

Signal (En théorie du signal)

On appelle signal toute grandeur physique variant en fonction du temps et véhiculant une information.

Exemples

- Le courant du secteur est une grandeur physique qui varie en fonction du temps mais elle ne véhicule aucune information.
- Le signal fourni par un microphone est une grandeur physique variant en fonction du temps et véhiculant une information : la parole.

Dans la pratique, un signal est généralement délivré par un capteur mesurant une grandeur physique (parole, température, pression..) sous forme d'un courant ou d'une tension.

Mathématiquement, un signal est défini par une fonction du temps

s : t ---> s(t)

t : est une variable représentant le temps.

s(t) : est une fonction réelle et parfois complexe.

Exemples de signaux

- La parole
- La tension électrique dans un fil téléphonique
- La variation de la température d'une pièce
- Les signaux physiologiques : ECG, EEG, EMG…
- Les ondes électromagnétiques captées par les récepteurs et télévisions
- Les signaux géophysiques : vibrations sismiques.

Objectif de la théorie du signal

L'objectif principal de la théorie du signal est la description mathématique des signaux. Elle permet principalement de :

- Mettre en évidence les caractéristiques d'un signal
- Analyser la nature des modifications ou altérations subies par les signaux lors de leur traitement.

L'outil de base de la théorie du signal est la transformée de Fourier

2. Définition d'un signal

Un signal est défini comme une quantité physique quelconque porteuse d'information, qui varie avec le temps t, l'espace x ou une autre variable ou plusieurs variables indépendantes.

Exemple

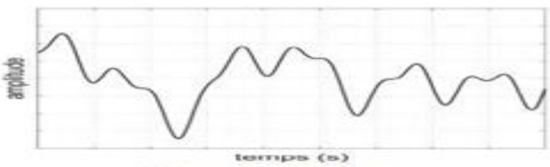
$$\left.\begin{array}{r} s_1(t) = 5t \\ s_2(t) = 20t^2 \end{array}\right\}$$ Signaux à une variable (t).

$$s(x; y) = 4x + 9xy + 5y^2$$ Signal à deux variables (x, y).

3. Caractéristiques des signaux

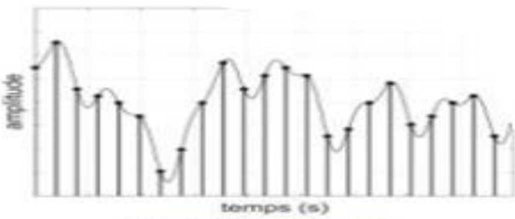
A cette notion de signal, est associé plusieurs modes de caractérisation

- Un signal à temps continu s(t) correspond à une grandeur dont la valeur existe à chaque instant t. Un tel signal est dit également analogique (analog signal). C'est un signal à amplitude et temps continus.



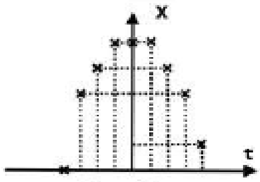
Signal analogique

- Un signal à temps discret (Discrete Time Signal) correspond à une grandeur dont la valeur n'est disponible qu'à certains instants t_n. C'est un signal à amplitude continu et temps discret.



Signal échantillonné

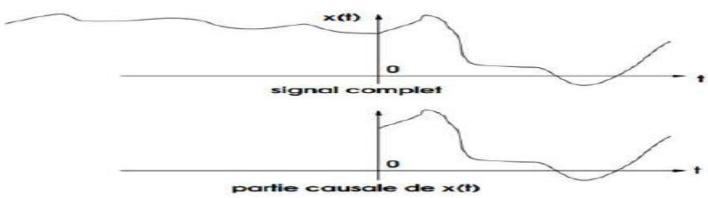
- Un signal numérique est un signal à amplitude et temps discret.



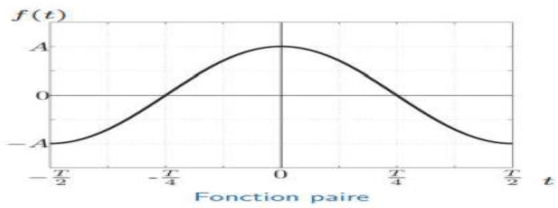
Numérique

- Un signal est dit causal s'il est nul pour tous les instants négatifs

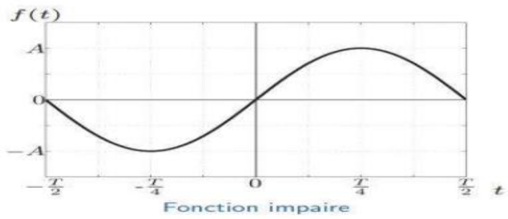
$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0.$$



- Un signal est dit pair s'il satisfait la relation $s(-t) = s(t), \forall\, t$. Il présente une symétrie horizontale par rapport à l'axe des ordonnées.



- Un signal est dit impair s'il satisfait la relation $s(-t) = -s(t)$ ou $s(t) = -s(-t)$ $\forall\, t$. Il présente une symétrie par rapport à l'origine.



4. Classification des signaux

La figure suivante résume la classification des signaux

Signaux (physiques)

Déterministes (Certains) — Aléatoires (Probabilistes)

Déterministes : Périodiques — Non périodiques

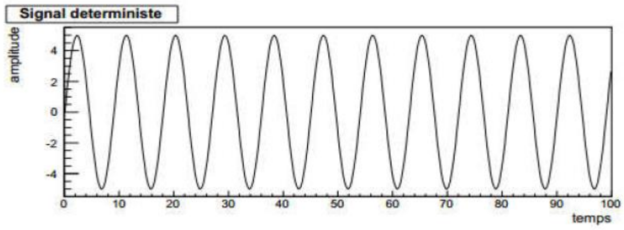
Aléatoires : Stationnaires — Non stationnaires

Figure 1.1 : Classification des signaux

-Signal déterministe ou certain : un signal est dit déterministe si son évolution en fonction du temps peut être prédite par un modèle mathématique approprié (formule mathématique). Il peut être de nature périodique ou apériodique (non périodique).

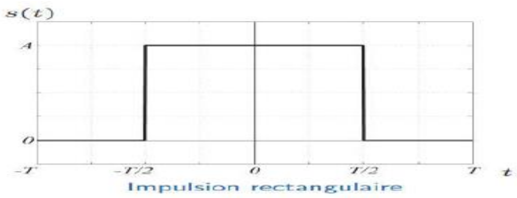
- **Signal périodique** : un signal est dit périodique s'il satisfait la relation
  $s(t) = s(t + nT) \quad n \in N$ et T : période du signal.

Exemple : les signaux sinusoïdaux de la forme $s(t) = A\sin(2\pi ft + \varphi)$.



- **Signal apériodique** : un signal est dit apériodique ou non périodique s'il ne satisfait pas la relation précédente.

Exemples : $s(t) = A\,e^{-\alpha t}$

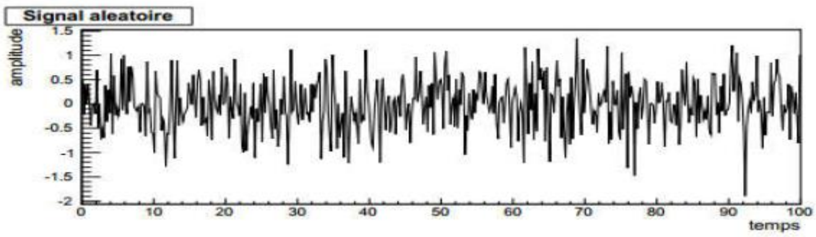


-Signal aléatoire : un signal est aléatoire si son évolution en fonction du temps est imprévisible. Leur description se fait à base d'observations statistiques (pas de formule mathématique explicite).

Exemples : Le signal électrocardiogramme ECG.

Le signal électroencéphalogramme EEG.

Le signal parole et le signal image.

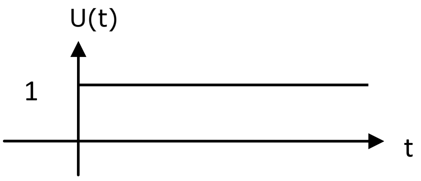


- **Signal stationnaire** : c'est un signal dont les propriétés statistiques sont indépendantes du temps (ne changent pas au cours du temps).
- **Signal non stationnaire** : il s'agit d'un signal dont les caractéristiques statistiques varient en fonction du temps.

5. Signaux particuliers

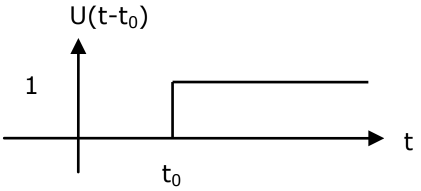
❖ Echelon unité (saut unité) ou fonction de Heaviside U(t)

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$



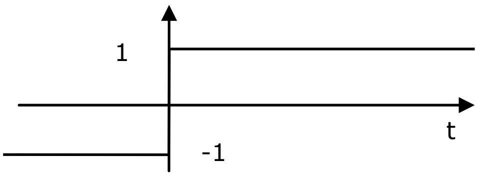
Version décalée de l'échelon

$$U(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq t_0 \\ 0 & \text{pour } t < t_0 \end{cases}$$



❖ Fonction signe Sgn(t)

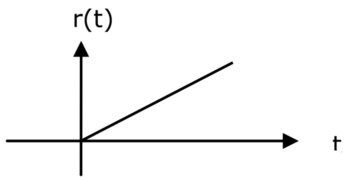
$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & si\ t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



$$\mathrm{sgn}(t) = \frac{t}{|t|} \quad \text{pour } t \neq 0$$

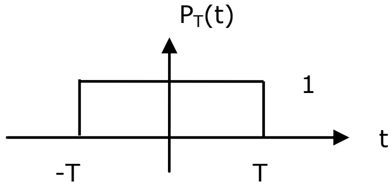
❖ Fonction rampe r(t)

$$r(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$



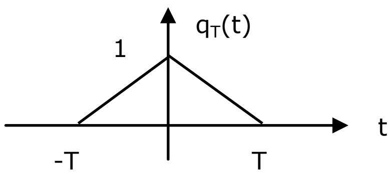
❖Impulsion rectangulaire rect (t) ou fonction porte $P_T(t)$

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



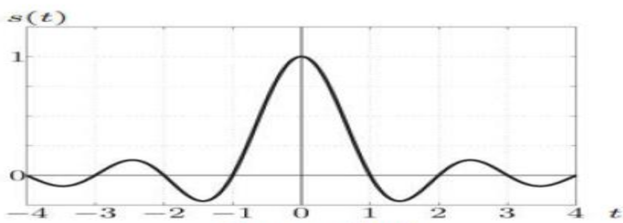
❖Impulsion ou fonction triangulaire tri(t) ou $q_T(t)$

$$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & \text{si } |t| \leq T \\ 0 & \text{si } |t| > T \end{cases}$$



❖ Fonction sinus cardinal Sincx

La fonction sinus cardinal est définie par : $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

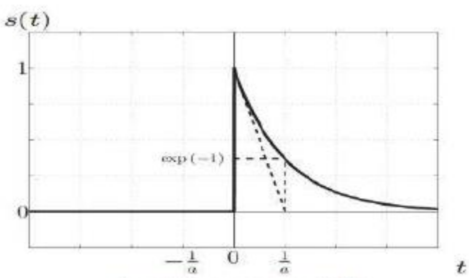


Sinus cardinal

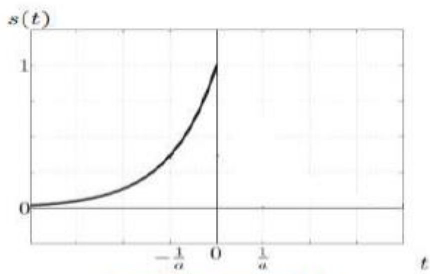
$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

❖ Signal exponentiel

Sa forme générale peut s'écrire : $f(t) = B\, e^{at}$. B et a sont des paramètres réels. Si $a > 0$, l'exponentielle est croissante si $a < 0$, l'exponentielle est décroissante.



Impulsion exponentielle



Impulsion exponentielle

❖ **Impulsion de Dirac $\partial(t)$**

L'impulsion de Dirac notée $\partial(t)$ est définie comme suit

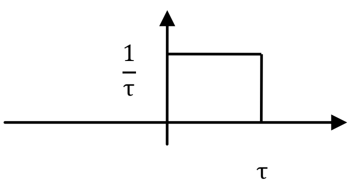
$$\partial(t) = 0 \quad pour\ t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t)\, dt = 1$$

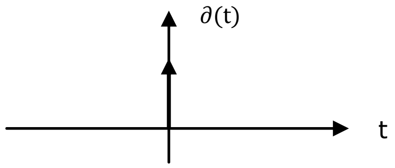
D'après cette définition, $\partial(t)$ est une impulsion de largeur infiniment petite et de surface égale à 1. Elle peut être obtenue à partir d'une impulsion rectangulaire de durée τ et d'amplitude $\frac{1}{\tau}$ auquel on fait tendre τ vers zéro. Il s'agit d'une fonction qui est nulle partout sauf à l'origine ou elle est égale à l'infini.

$$\partial(t) = \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau} P_{\tau/2}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

$\frac{1}{\tau} P_{\tau/2}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$

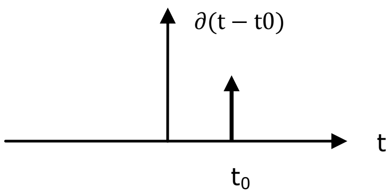


$\underset{T \to 0}{\Longrightarrow}$



L'aire de l'impulsion rectangulaire est égale à l'unité, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t)\, dt = 1$.

Sa version décalée est



Propriétés de l'impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \partial(t)\, dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \partial\,(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

$\partial(-t) = \partial(t)$ (signal pair)

$$\partial(a.t) = \frac{1}{|\,a\,|}\,\partial(t)$$

$\partial(t) = \frac{du(t)}{dt}$ (C'est la dérivée de l'échelon unité)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial'(t)\, f(t)\, d(t) = -f'(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \partial^{(n)}(t)\, f(t)\, dt = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

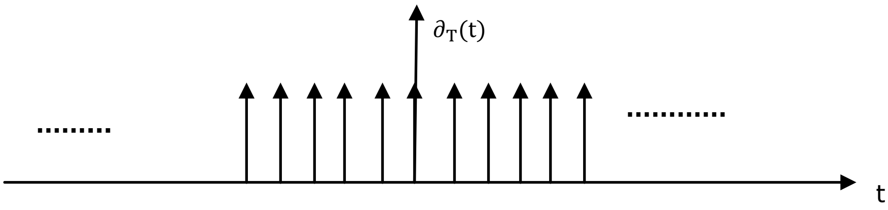
$$f(t).\partial^{(n)}(t) \overset{eq}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}\, f^{(k)}(0)\ \partial^{(n-k)}(t)$$

$$f(t).\partial^{(n)}(t - t_0) \overset{eq}{\rightarrow} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, f^{(k)}(t_0)\ \partial^{(n-k)}(t - t_0)$$

Peigne de Dirac

Le peigne de Dirac noté $\partial_T(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT)$ est une fonction périodique de période T. Il est défini comme une suite d'impulsions de Dirac espacés de T sur l'axe des temps.

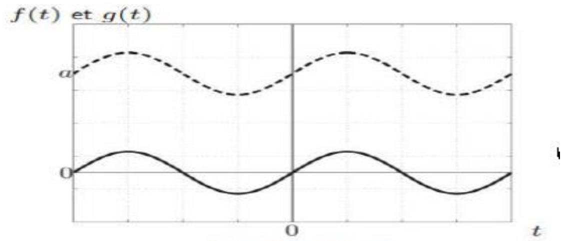
$$\partial_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial(t - nT) = \cdots \partial(t + 2T) + \partial(t + T) + \partial(t) + \partial(t - T) + \partial(t - 2T) + \ \ldots.$$



6. Opérations sur les signaux

- **Décalage (translation verticale) :** un décalage est la transformation qui fait correspondre à toute fonction f(t), une fonction g(t) telle que

$$g(t) = f(t) + a \quad \text{avec } a \in R$$



Fonction décalée

- **Décalage temporel ou (translation horizontale) :** la fonction g(t) est la fonction f(t) retardée de t_0 ($t_0 > 0$) si pour tout $t \in R$, on a

$$g(t) = f(t - t_0)$$

- si $t_0 < 0$, $g(t) = f(t + t_0)$ est le signal g(t) décalé à gauche (signal avancé).

- si $t_0 > 0$, $g(t) = f(t - t_0)$ est le signal g(t) décalé à droite (signal retardé).

Exemple soit u(t) un signal et a un réel positif ($a > 0$)

$$U(t + a) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t + a \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t + a < 0 \end{cases}$$

$$U(t + a) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \geq -a \\ 0 & \text{pour } t < -a \end{cases}$$

De la même manière

$$U(t-a)=\begin{cases}1 & \text{pour } t-a \geq 0\\ 0 & \text{pour } t-a < 0\end{cases}$$

$$U(t-a)=\begin{cases}1 & \text{pour } t \geq a\\ 0 & \text{pour } t < a\end{cases}$$

- **Changement d'échelle**

Soit $P_{1/2}(t)$ un signal et a un réel positif à 1 $(a > 1)$

$$P_{\frac{1}{2}}(at)=\begin{cases}1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq at \leq \frac{1}{2}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

$$P_{\frac{1}{2}}(at)=\begin{cases}1 & \text{pour } -\frac{1}{2a} \leq t \leq \frac{1}{2a}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

De la même manière

$$P_{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{a}\right)=\begin{cases}1 & \text{pour } -\frac{1}{2} \leq \frac{t}{a} \leq \frac{1}{2}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

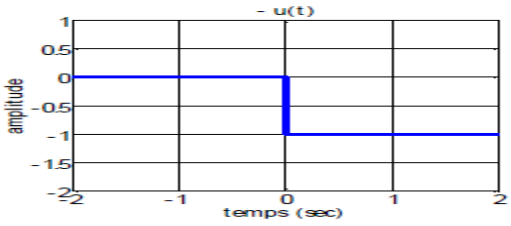
$$P_{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{a}\right)=\begin{cases}1 & \text{pour } -\frac{a}{2} \leq t \leq \frac{a}{2}\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

Donc

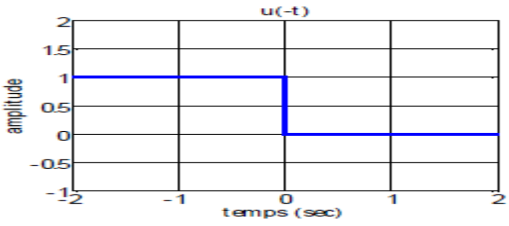
$f\left(\frac{t}{a}\right)$: permet d'agrandir l'échelle de f(t).

$f(at)$: permet de réduire l'échelle de f(t).

- **Inversion**



Inversion du signal



inversion du temps

L'inversion du signal consiste à inverser les valeurs du signal.

Pour l'inversion du temps du signal, nous avons par exemple

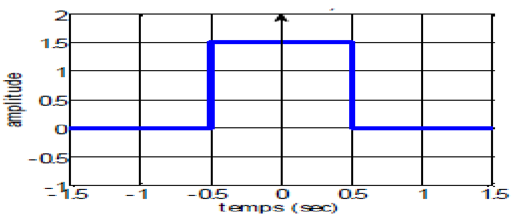
$$U(-t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } -t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$U(-t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t \leq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Graphiquement, l'inversion du temps d'un signal consiste à faire pivoter le signal autour de l'axe des ordonnées et l'inversion du signal revient à faire pivoter le signal autour de l'axe des abscisses.

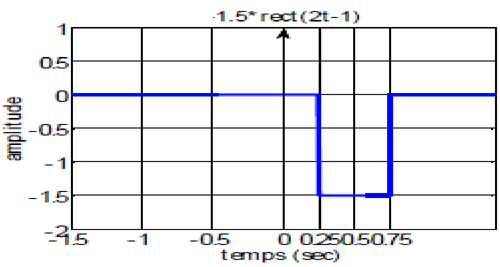
Si le signal est impair, l'inversion du temps a le même effet que l'inversion du signal puisque f(-t) = -f(t).

- **Multiplication par un scalaire**



Multiplication par un scalaire

- **Plusieurs opérations à la fois**



signal porte subi plusieurs opérations

Lorsqu'il y a plusieurs opérations au même temps, on peut déduire le tracé du signal

-soit par la méthode directe en faisant les changements sur son expression.

-soit graphiquement en appliquant les opérations l'une après l'autre à savoir l'inversion du temps, le changement d'échelle et le décalage.

Remarque

Pour les opérations sur le signal rampe, il vaut mieux suivre la méthode directe en déduisant le tracé de son expression

$$r(-2t+1) = \begin{cases} -2t+1 & \text{pour } -2t+1 \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$r(-2t+1) = \begin{cases} -2t+1 & \text{pour } t \geq \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

7. Energie et puissance d'un signal

Le signal dans les circuits électriques est généralement une tension ou un courant. L'énergie dissipée pendant une durée donnée dans une résistance présentant à ses bornes une tension v(t) est : $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{V^2(t)}{R}\, dt$

En courant : $E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Ri^2(t) dt$

L'énergie est, dans chaque cas, proportionnelle à l'intégrale du carré du signal.

Si on considère une énergie normalisée, R est égale à l'unité et on obtient

$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt$. Si le signal est complexe, cette énergie devient

$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, f^*(t)\, dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2\, dt$. (Énergie définie pour une durée finie)

En considérant un intervalle s'étendant sur tout l'axe réel, on obtient

- L'énergie totale d'un signal f(t)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |\, f(t)\, |^2 \; dt$$

Exemple

Soit $f(t) = A\, e^{-a|t|} \quad a > 0$

$E = \frac{A^2}{2} < \infty \;\rightarrow$ Signal à énergie finie

- La puissance moyenne d'un signal est définie par

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) \; dt$$

Exemple

Soit f(t) = A

P = $A^2 < \infty \;\rightarrow$ Signal à puissance moyenne finie

Remarque

Du point de vue énergétique, les signaux peuvent être classés en deux principales catégories

- Les signaux à énergie finie qui satisfont à la condition

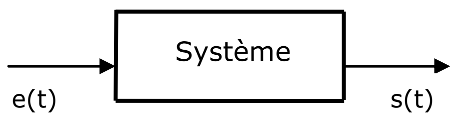
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 < \infty$$

- Les signaux à puissance moyenne finie qui satisfont à

$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) \; dt < \infty$$

10. Notions de base sur les systèmes

Un système est défini comme un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon certaines lois pour réaliser une ou plusieurs fonctions. On peut assimiler un système à une boite noire qui possède des entrées sur lesquelles nous pouvons agir et des sorties qui nous permettent d'observer ses réactions.



Systèmes linéaires et invariants dans le temps

- Un système est linéaire s'il vérifie le principe de superposition : la réponse d'une somme d'excitations est égale à la somme des excitations correspondantes

  Soient : $s_1(t)$ la réponse d'un système à l'excitation $e_1(t)$

  $s_2(t)$ la réponse d'un système à l'excitation $e_2(t)$

  à l'entrée $a_1 e(t) + a_2 e_2(t)$ correspondra la sortie $a_1 s_1(t) + a_2 s_2(t)$ a_1 et a_2 sont des constantes.

- Un système est dit stationnaire ou à temps invariant lorsque les paramètres du modèle mathématique ne varient pas au cours du temps pendant toute sa durée de vie. D'une autre manière, si l'on décale l'entrée de t_0 la sortie sera décalée de la même manière :

$$e(t) \longrightarrow s(t)$$

$$e(t - t_0) \longrightarrow s(t - t_0)$$

- Un système causal est un système qui ne répond pas avant d'être excité. Si l'entrée est nulle pour $t < 0$, la sortie l'est aussi. Notons que tous les systèmes physiques sont causaux.
- Un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps. Un système dynamique est linéaire s'il est décrit par une équation différentielle linéaire.

Remarque

La linéarité et l'invariance dans le temps jouent un rôle fondamental en théorie et traitement du signal et l'analyse des systèmes parce que beaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés par des systèmes LTI.

11. Notion de bruit et rapport signal sur bruit

Un bruit (Noise) est un phénomène perturbateur gênant la perception ou l'interprétation d'un signal. En traitement du signal, le bruit correspond à tout signal indésirable de nature aléatoire limitant la compréhension (l'intelligibilité) du signal utile.

Rapport signal sur bruit (signal-to-noise ratio SNR)

Pour mesurer la qualité d'un signal affecté par un bruit (degré de contamination du signal par du bruit), on fait une mesure appelée rapport signal sur bruit (SNR). C'est le rapport entre la puissance du signal et la puissance du bruit.

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mathrm{P_s}}{\mathrm{P_b}}$$

Ce rapport est exprimé le plus souvent en dB

$$\mathrm{SNR_{dB}} = 10 \log_{10} \frac{\mathrm{P_s}}{\mathrm{P_b}}$$

En traitement du signal, on a toujours intérêt à maximiser le rapport signal sur bruit.