Chapitre 2

Analyse de Fourier

1. Introduction
2. Rappel sur la série de Fourier
3. Transformée de Fourier
4. Transformée de Fourier d'un signal périodique

1. Introduction

Il existe deux domaines de description du signal selon la nature de la variable indépendante.

Le domaine temporel de la forme s(t) dans lequel la variable indépendante est le temps. Il s'agit du domaine de discipline usuel des signaux. Dans ce domaine, de représentation, le signal peut être caractérisé par sa durée, sa période fondamentale ou son amplitude.

Le domaine de fréquence de la forme S(f) dans lequel la variable indépendante est la fréquence f dont la dimension est l'inverse du temps $f = \frac{1}{T}$. Dans ce domaine de représentation, le signal peut être caractérisé par sa bande passante, sa fréquence fondamentale ou sa phase.

Ces deux domaines de description du signal sont reliés entre eux par la transformée de Fourier notée TF. Cette transformée joue un rôle fondamental en traitement du signal.

2. Rappel sur la série de Fourier

Tout signal périodique f(t) de période T peut être développé en une somme de fonctions sinusoïdales de fréquence f multiple de la fréquence du signal f_0= 1/T.

- **Forme réelle**

Si f(t) est périodique, elle peut se mettre sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\,\omega_0 t$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n2\pi f_0 t + b_n \sin n\,2\pi f_0 t$$

a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier réelle, ils se calculent à partir des relations suivantes

$a_0 = \frac{1}{T} \int_{(T)} f(t)dt$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t)\ \cos 2\pi n f_0 t\ dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{(T)} f(t) \sin 2\pi n f_0 t\, dt$

$f_0 = \frac{1}{T}$: fréquence fondamentale

a_0 : valeur moyenne ou composante continue

La représentation des a_n et b_n en fonction de f_0 s'appelle spectre de f(t) ; c'est un spectre discret (un ensemble de raies).

Remarque

- Si f(t) est paire : les coefficients $b_n = 0$;
- Si f(t) est impaire : les coefficients $a_0 = a_n = 0$;

- **Forme complexe**

En utilisant la formule d'Euler, on obtient la forme complexe

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n\, e^{jn2\pi f_0 t}$$

$C_n = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\, e^{-jn2\pi f_0 t}\, dt$ = coefficient de Fourier.

$C_0 = \frac{1}{T}\int_{(T)} f(t)\ dt$ = valeur moyenne du signal.

En posant $C_n = C(nf_0)$, on obtient le spectre de fréquence qui est une grandeur en général complexe. Ce spectre peut se décomposer en

- Un spectre d'amplitude $|\,C(nf_0)\,|$
- Un spectre de phase $\varphi(nf_0)$

Ce spectre $C(nf_0) = |\,C(nf_0)\,|\ e^{j\varphi(nf_0)}$ est composé de raies ; il s'agit d'un spectre discret.

Exemple :

soit le signal s(t) de période T, défini sur [0, T/2] par

$$s(t) = \begin{cases} A & t \in [0 \;\; {}^{T}/_{4}] \\ -A & t \in [{}^{T}/_{4} \;\; {}^{T}/_{2}] \end{cases}$$

s(t) est paire, $b_n = 0$.

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cos n\omega_0 t$$

3. Transformée de Fourier

Soit f(t) un signal déterministe, sa transformée de Fourier est

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \text{ou} \quad F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

La transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad \text{ou} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$$

Exemples :

TF de $P_T(t) = \,?$ $\quad \partial(t) = ?$

$$F(\omega) = \int_{-T}^{+T} 1.\, e^{-j\omega t}\, dt = 2T \operatorname{sinc}\omega T \qquad \boxed{P_T(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} 2T\operatorname{sinc}\omega T}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial(t) e^{-j\omega t}\, dt = 1 \qquad \boxed{\partial(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} 1}$$

Le tableau suivant contient les transformées de Fourier les plus utilisées

x(t)	X(ω)	x(t)	X(ω)
$\partial(\mathrm{t})$	1	$\mathrm{e}^{-\mathrm{a}\|\mathrm{t}\|}, \mathrm{a} > 0$	$\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2 + \omega^2}$
$\partial(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}_0}$	$\dfrac{1}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{t}^2}$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{a}\|\omega\|}$
1	$2\pi\,\partial(\omega)$	$\mathrm{e}^{-\mathrm{at}^2}$, $\mathrm{a} > 0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{\mathrm{a}}}\ \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4\mathrm{a}}}$
$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}_0}$	$2\pi\,\partial(\omega - \omega_0)$	$P_a(\mathrm{t})$	$2a\sin\dfrac{\omega a}{\omega a}$
U(t)	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$	$\sin\dfrac{at}{\pi t}$	$P_a(\omega)$
U(-t)	$-\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)$	sgnt	$\dfrac{2}{j\omega}$
$\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\mathrm{U}(\mathrm{t}), \mathrm{a} > 0$	$\dfrac{1}{\mathrm{a} + \mathrm{j}\omega}$	$Q_T(\mathrm{t})$	$T\ sinc^2(\dfrac{\omega T}{2})$
$\mathrm{t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{at}}\mathrm{U}(\mathrm{t}), \mathrm{a} > 0$	$\dfrac{1}{(\mathrm{a} + \mathrm{j}\omega)^2}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \partial(t - kT)$	$\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \partial(\omega - k\omega_0)$

Tableau 1.1 : Transformées de Fourier usuelles

Propriétés de la transformée de Fourier

On suppose que f(t) est complexe de la forme f(t) = f_1(t) + jf_2(t)

Donc $\mathrm{F}(\omega) = \mathrm{R}(\omega) + \mathrm{j}\mathrm{X}(\omega) = |\mathrm{A}(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$

$|\mathrm{A}(\omega)|$: Spectre d'amplitude de f(t). $|\mathrm{A}(\omega)| = \sqrt{\mathrm{R}(\omega)^2 + \mathrm{X}(\omega)^2}$

$\phi(\omega)$: Spectre de phase de f(t) = arg $F(\omega) = \mathrm{arctg}(\frac{X(\omega)}{R(\omega)})$

$A^2(\omega)$: Spectre d'énergie de f(t).

- **Linéarité**

$$f_1(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F_1(\omega) \quad \text{et} \quad f_2(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F_2(\omega)$$

$$a_1 f_1(t) + \ a_1 f_1(t) + \cdots a_n f_n(\omega) + \overset{TF}{\leftrightarrow} a_1 F_1(\omega) + \ a_1 F_1(\omega) + \cdots + a_n F_n(\omega)$$

- **Symétrie**

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)\ ; \quad \text{alors} \quad F(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} 2\pi f(-\omega)$$

- **Translation temporelle**

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)\ ; \quad \text{alors} \quad f(t \mp t_0) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)e^{\mp j\omega t_0}$$

- **Translation fréquentielle**

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega)\ ; \quad \text{alors} \quad f(t)e^{j\omega_0 t} \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega - \ \omega_0)$$

- **Changement d'échelle**

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega); \quad \text{alors} \quad f(\omega a.t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{|a|} F(\frac{\omega}{a})$$

- **Dérivation temporelle**

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega); \quad \text{alors} \quad \frac{d^n f(t)}{dt} \overset{TF}{\leftrightarrow} (j\omega)^n F(\omega)$$

- **Dérivation fréquentielle**

$$\text{si} \quad f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} F(\omega); \quad \text{alors} \quad (-jt)^n f(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{d^n F(\omega}{d\omega}$$

Théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega$$

L'énergie dans le domaine temporel est égale à l'énergie dans le domaine fréquentiel.

4. Transformée de Fourier d'un signal périodique

Un signal périodique peut être considéré comme la répétition cyclique d'un signal élémentaire d'une période. Il peut donc être développé en série de Fourier complexe.

La série de Fourier complexe est de la forme : $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \; e^{jn\omega_0 t}$ $\quad \omega_0 = 2\pi f_0$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Cherchons sa TF

$$F(\omega) = TF\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{jn\omega_0 t}\right] e^{-j\omega t}\, dt$$

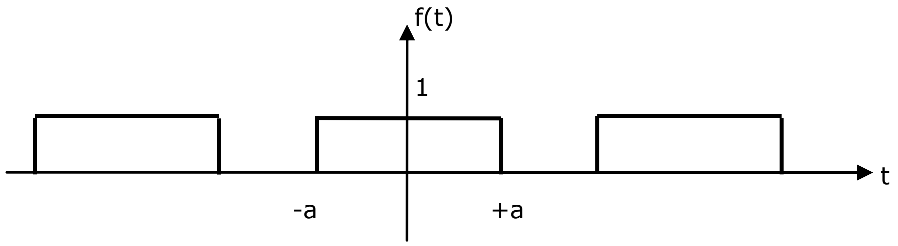
$$= 2\pi \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n\, \partial(\omega - n\omega_0)$$

C_n est calculé sur une période : $\quad C_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$

$$\boxed{F(\omega) = \omega_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} F_0(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0)}$$

Exemple

Soit le signal périodique suivant : c'est un train d'impulsions rectangulaires.



$$F(\omega) = \omega_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} F_0(n\omega_0)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

$$f_0(t) = P_a(t) \quad \Longrightarrow \quad F_0(\omega) = 2a\,\mathrm{sinc}\,(\omega a)$$

$$C_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{2a}{T}\,\mathrm{sinc}(n\omega_0 a)$$

$$F(\omega) = \frac{4a\pi}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} sinc(n\omega_0 a)\, \delta(\omega - n\omega_0)$$

On obtient un signal enveloppe et un signal enveloppé. Le spectre du train d'impulsions rectangulaires enveloppe le peigne de Dirac. Le signal enveloppé a la plus petite période c'est-à-dire la plus grande fréquence.