Chapitre 3

Transformée de Laplace

1. Introduction
2. Définition
3. Propriétés de la TL
4. Transformée de Laplace d'une fonction périodique
5. Calcul de la transformée inverse
6. Application de la TL à la résolution des équations différentielles à coefficients constants

1. Introduction

La transformée de Laplace (TL) est un outil mathématique qui se prête à résoudre les équations différentielles dès que le système étudié devient complexe c'est-à-dire lorsqu’il s’agit d’équations différentielles d’ordre assez élevé. Cette méthode de calcul est souvent appelé calcul opérationnel.

2. Définition

Soit f(t) une fonction du temps.

Soit p une variable complexe : $p = \alpha + j\omega$

On appelle TL, la fonction de la variable complexe notée F(p) telle que

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

F(p) est appelée l’image de f(t). L’existence de F(p) suppose que l’intégrale converge. De manière réciproque, il existe une transformation inverse qui permet de retrouver f(t) à partir de F(p)

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\omega}^{\alpha + j\omega} F(p)\, e^{p}\, dp$$

f(t) est dite transformée inverse ou originale de F(p).

Exemples

Soit à déterminer la TL des fonctions suivantes

$f_1(t) = \partial(t)$; $f_2(t) = U(t)$; $f_3(t) = e^{-at}$

$$L\{\partial(t)\} = \int_0^{\infty} \partial(t) e^{-pt}\, dt = e^{-pt}|t = 0 = 1$$

$$L\{U(t)\} = \int_0^{\infty} 1.\, e^{-pt}\, dt = \frac{-1}{p} e^{-pt}\Big| = \frac{1}{p}$$

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-pt}\,dt = \frac{-1}{p+a}e^{-(a+p)t}\Big| = \frac{1}{p+a}$$

Le tableau suivant donne la liste des TL des fonctions les plus utilisées

f(t)	**F(p)**	**f(t)**	**F(p)**
$\partial(t)$	1	$t^2\ e^{-at}$	$\frac{2}{(p+a)^3}$
U(t)	$\frac{1}{p}$	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$		

Figure2.1 : Transformée de Laplace des fonctions usuelles

3. Propriétés de la TL

- Unicité

à $f(t) \overset{TL}{\rightarrow} F(p)$ unique

à $F(p) \xrightarrow{TL^{-1}} f(t)$ unique

- **Linéarité**

$$L\{a\ f_1(t) + b\ f_2(t)\} = a\ L\{f_1(t)\} + b\ L\{f_2(t)\} = a\ F_1(p) + b\ F_2(p)$$

Exemples

$$L\{3\ e^{-t} - e^{-2t}\} = 3\ L\{e^{-t}\} - L\{e^{-2t}\} = \frac{3}{P+1} - \frac{1}{P+2}$$

$$L\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4\,L\{t^2\} - 3\,L\{\cos 2t\} + 5\,L\{e^{-t}\} = 4.\frac{2}{P^3} - 3.\frac{P}{P^2+4} + 5.\frac{1}{P+1}$$

- Changement d'échelle

$$f(a.t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|a|}\,F(\frac{P}{a})$$

Exemples

$$L\,\{\sin 5t\} = \frac{1}{5}\,\frac{1}{(\frac{P}{5})^2+1} = \frac{25}{P^2+25}$$

$$L\{e^{-3t}\} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{P}{3}+1} = \frac{1}{P+3}$$

- Translation

$$f(t-a) \xrightarrow{TL} F(p)e^{-ap}$$

$$f(t)e^{bt} \xrightarrow{TL} F(p-b)$$

Exemple

$$f(t) = \sin t\; e^{2t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{(P-2)^2+1}$$

- Dérivation temporelle

$$\text{pour } n = 1 \qquad L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = PF(P) - f(0)$$

$$\text{pour } n = 2 \qquad L\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = P^2F(P) - Pf(0) - f'(0)$$

$$\text{pour } n \qquad L\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = P^nF(P) - \sum_{k=1}^{n} P^{n-k}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}f(0)$$

Les $f^{(n)}(0)$ représentent les conditions initiales.

Exemple

Déterminer la TL de la dérivée de la fonction $f(t) = e^{-at}$

$$L\{f'(t)\} = PF(P) - f(0) = \frac{P}{P+a} - 1 = \frac{-a}{P+a}$$

- Dérivation fréquentielle

$$(-1)^n\,t^n\,f(t) \xrightarrow{TL} \frac{d^nF(p)}{dP^n}$$

- Intégration

$$L\{\int_0^t f(t)dt\} = \frac{F(P)}{P}$$

Remarque

Si les conditions initiales sont nulles

- Dériver dans le domaine temporel, revient à multiplier par P dans le domaine de Laplace.
- Intégrer dans le domaine temporel, revient à diviser par P dans le domaine de Laplace.

- Théorème de la valeur initiale

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{P\to\infty} PF(P)$$

Exemple

$$\mathrm{f(t)} = \mathrm{e}^{-3\mathrm{t}} \xrightarrow{\mathrm{TL}} \frac{1}{\mathrm{P+3}}$$

$$f(0) = \lim_{t\to 0} e^{-3t} = \lim_{P\to\infty} \frac{P}{P+3} = 1$$

- Théorème de la valeur finale

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{P\to 0} PF(P)$$

Exemple

$$f(\mathrm{t}) = (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}) \xrightarrow{\mathrm{TL}} \mathrm{F(p)} = \frac{1}{P} - \frac{1}{\mathrm{P+1}} = \frac{1}{\mathrm{P(P+1)}}$$

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty}((1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}) = \lim_{P\to 0} P\frac{1}{\mathrm{P(P+1)}} = 1$$

Convolution

$$\mathrm{L\{\, f(t) \otimes g(t)\} = F(p).G(p)}$$

4. TL d'une fonction périodique

f(t) est une fonction périodique pour $\mathrm{t} \geq 0$.

$$\mathrm{f(t)} = \sum_0^\infty \mathrm{f_0(t - nT)} = \mathrm{f_0(t)} + \mathrm{f_0(t-T)} + \mathrm{f_0(t-2T)} + \cdots + \mathrm{f_0(t-nT)} \xrightarrow{\mathrm{TL}}$$

$$\mathrm{F(P)} = F_0(P) + F_0(\mathrm{P})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{PT}} + F_0(\mathrm{P})\mathrm{e}^{-2\mathrm{PT}} + \cdots \mathrm{F_0(P)e^{-nPT}} = \mathrm{F_0(P)[\,1 + e^{-PT} + e^{-2PT} + \cdots\ e^{-nPT}]} = F_0(\mathrm{P}) \sum_0^\infty \mathrm{e^{-nPT}}$$

$\sum_0^{\infty} e^{-nPT}$ = suite géométrique de raison $e^{-PT} = \frac{1}{1-e^{-PT}}$

$$F(P) = \frac{F_0(P)}{1 - e^{-PT}} = \frac{\int_0^T f_0(t)e^{-PT}\,dt}{1 - e^{-PT}}$$

Exemple

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{1}{(1+P^2)(1-e^{-P\pi})}$$

5. Calcul de la transformée inverse

On se place dans le cas ou F(p) est une fraction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur ou égal à celui du dénominateur $F(P) = \frac{N(P)}{D(P)}$ $\quad d^\circ(N(P)) < d^\circ(D(P))$.

On cherche les zéros (racines du numérateur) et les pôles (racines du dénominateur) de façon à écrire F(P) sous la forme

$$F(P) = \frac{(P - Z_1)(P - Z_2)\dots(P - Z_m)}{(P - P_1)(P - P_2)\dots(P - P_n)}$$

Z_m représentent les zéros du numérateur.

P_n représentent les pôles du dénominateur.

- **Cas ou les pôles sont simples**

$$F(P) = \frac{N(P)}{(P - P_1)(P - P_2)\dots(P - P_n)}$$

On peut alors écrire F(P) sous la forme

$$F(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(P - P_K)} = \frac{A_1}{(P - P_1)} + \frac{A_2}{(P - P_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(P - P_n)}$$

Les coefficients A_k sont appelés résidus des pôles P_k

$$A_1 = (P - P_k)F(P)|_{P = Pk}$$

Exemple

$$F(P) = \frac{P+1}{P^2+5P+6} = \frac{P+1}{(P+2)(P+3)} = \frac{A_1}{(P+2)} + \frac{A_2}{(P+3)}$$

$$A_1 = (P+2)F(P)|_{P=-2} = \frac{P+1}{P+3} = -1 = A_1$$

$$A_2 = (P+3)F(P)|_{P=-3} = \frac{P+1}{P+2} = 2 = A_2$$

$$F(P) = \frac{-1}{(P+2)} + \frac{2}{(P+3)} \xrightarrow{TL^{-1}} f(t) = -e^{-2t} + 2\,e^{-3t}$$

- **Cas ou les pôles sont multiples**

D(P) de F(P) possède des pôles simples et des pôles multiples Pi d'ordre s

$$F(P) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(P-P_K)} + \sum_{k=1}^{s} \frac{C_k}{(P-P_i)^k}$$

$$C_k = \frac{1}{(s-1)!}\left\{\frac{d^{s-k}}{dP^{s-k}}\,[(P-P_i)^s\;F(P)\}P_{=P_i}\right.$$

Exemple

$$F(P) = \frac{1}{P(P+2)^2} = \frac{A_1}{P} + \sum_{k=1}^{2} \frac{C_k}{(P+2)^2} = \frac{A_1}{P} + \frac{C_1}{P+2} + \frac{C_2}{(P+2)^2}$$

$$A_1 = P\,F(P)|_{p=0} = \frac{(P+1)}{(P+2)^2} = \frac{1}{4}$$

$$C_1 = \frac{d}{dp}\,[(P+2)^2\,F(p)]_{P=-2} = \frac{-1}{P^2}]_{P=-2} = \frac{-1}{4}$$

$$C_2 = (P+2)^2\,F(P)]_{P=-2} = \frac{1}{2}$$

$$F(P) = \frac{1}{4}\frac{1}{P} - \frac{1}{4}\frac{1}{P+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(P+2)^2} \xrightarrow{TL^{-1}} f(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t}$$

- **Cas ou les pôles sont complexes**

Si le dénominateur de F(P) admet des racines complexes, la méthode consiste à écrire D(P) sous la forme $(P+a)^2 + \omega^2$. La décomposition de F(P) sera :

$$F(P) = \frac{\alpha P + \beta}{(P+a)^2 + \omega^2}$$

Exemples

$$-X(P) = \frac{1}{P(P^2+9)} = \frac{A}{P} + \frac{BP+C}{P^2+9} = \frac{1}{9}\frac{1}{P} - \frac{1}{9}\frac{P}{P^2+9} \xrightarrow{TL^{-1}} x(t) = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t$$

$$-Y(P) = \frac{1}{(P^2+9)(P^2+4)} = \frac{AP+B}{P^2+4} + \frac{CP+D}{P^2+9} = \frac{-1}{5}\frac{3}{P^2+9} + \frac{3}{5x2}\frac{2}{P^2+4} \xrightarrow{TL^{-1}}$$

$$x(t) = \frac{-1}{5}\sin 3t + \frac{3}{10}\sin 2t$$

6. Application de la TL à la résolution d'équations différentielles à coefficients constants

Pour résoudre les équations différentielles par TL, on procède de la façon suivante

- Ecriture de la TL des deux membres de l'équation en utilisant le tableau des transformées ainsi que les propriétés de la TL.
- Décomposition de la fonction obtenue.
- Déduction de la fonction du temps.

Exemples

1) $\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = e^{-2t}$ et $x(0) = 0.$

$L[\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)] = L[e^{-2t}] \Longrightarrow PX(P) - x(0) + 3X(P) = \frac{1}{P+2}$

$$X(P) = \frac{1}{(P+2)(P+3)} = \frac{A_1}{P+2} + \frac{A_2}{P+3} = \frac{1}{P+2} - \frac{1}{P+3}$$

$$x(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$$

2) $\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4e^{2t}$ avec $x(0) = -3$ et $x'(0) = 5.$

$$L[\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)] = L[4e^{2t}]$$

$$P^2X(P) - Px(0) - x'(0) - 3[PX(P) - x(0)] + 2X(P) = \frac{4}{P-2}$$

$$X(P) = \frac{-3P^2 + 20P - 24}{(P-2)^2(P-1)} = \frac{A}{P-1} + \frac{C_1}{P-2} + \frac{C_2}{(P-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{P-1} + \frac{4}{P-2} + \frac{4}{(P-2)^2} \quad \rightarrow \quad x(t) = -7e^{t} + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$