Chapitre 4

Produit de Convolution

1. Introduction
2. Définition
3. Propriétés de la convolution
4. Convolution de l’impulsion de dirac
5. Déconvolution

1. Introduction

La convolution ou produit de convolution est une opération mathématique très importante en traitement du signal et plus particulièrement dans l'étude des systèmes. Elle montre l'effet que produit le système sur le signal appliqué à son entrée. La convolution permet de déterminer la réponse d'un système linéaire de réponse impulsionnelle h(t) soumis à un signal d'entrée e(t) : $s(t) = h(t) \otimes e(t)$

2. Définition

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux signaux réels à temps continu, on définit le produit de convolution par l'intégrale suivante

$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ = convolution de $f_1(t)$ et $f_2(t)$.

Le produit de convolution est une intégrale à paramètre t. Le résultat est une fonction de t.

L'opération de la convolution comprend quatre étapes

1. Inverser le temps du signal $f_2(\tau)$ et le retarder de t → $f_2(t-\tau)$
2. Multiplier les deux signaux $f_1(\tau)$ et $f_2(t_i-\tau)$ pour une valeur de t_i donné
3. Intégrer le produit $f_1(\tau)f_2(t_i-\tau)$ par rapport à τ, ceci donne une valeur de l'intégrale correspondant à ti
4. Répéter les étapes de 1 à 3 en variant t de $-\infty$ à $+\infty$ pour avoir le signal $f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t)$

Interprétation géométrique de la convolution

$f_3(t)$ est le produit de convolution de deux signaux $f_1(t)$ et $f_2(t)$

$f_3(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$.

L'opération de la convolution peut être réalisée graphiquement selon les étapes suivantes

- Le signal $f_1(\tau)$ est identique à $f_1(t)$ dans lequel t est remplacé par τ.
- Le signal $f_2(t-\tau)$ est en fonction de τ et doit être obtenu en deux étapes

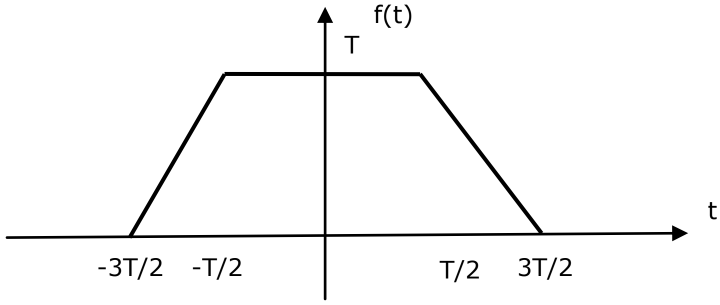
- Le signal $f_2(-\tau)$ est la version retournée dans le temps de $f_2(t)$ dans lequel t est remplacé par τ.
- Le signal $f_2(-\tau)$ est translaté à gauche d'une valeur t et devient $f_2(t-\tau)$.

- Finalement, les signaux $f_1(\tau)$ et $f_2(t-\tau)$ sont multipliés et l'aire du produit est égale à $f_1(t) \otimes f_2(t)$ pour une valeur de t donnée. La convolution $f_3(t) = f_1(t) \otimes f_2(t)$ est en fonction du temps, elle doit être évaluée pour $-\infty < t < +\infty$.

Exemple

Soit à calculer le produit de convolution : $P_{\frac{T}{2}}(t) \otimes P_T(t)$

Après calcul, on obtient :



$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{-3T}{2} \\ t + \frac{3T}{2} & \text{si } \frac{-3T}{2} < t < \frac{-T}{2} \\ T & \text{si } \frac{-T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ -t + \frac{3T}{2} & \text{si } \frac{T}{2} < t < \frac{3T}{2} \\ 0 & \text{si } t > \frac{3T}{2} \end{cases}$$

3. Propriétés de la convolution

Soient $f_1(t)$ et $f_2(t)$ deux signaux, le produit de convolution possède les propriétés suivantes

- Commutativité : $f_1(t) \otimes f_2(t) = f_2(t) \otimes f_1(t)$ l'ordre des signaux est sans importance.
- Associativité : $f_1(t) \otimes [f_2(t) \otimes f_3(t)] = [f_1(t) \otimes f_2(t)] \otimes f_3(t)$
- Distributivité par rapport à l'addition :

$$f_1(t) \otimes [f_2(t) + f_3(t)] = [f_1(t) \otimes f_2(t)] + [f_1(t) \otimes f_3(t)]$$

- Elément neutre : $f(t) \otimes \delta(t) = f(t)$ et $f(t) \otimes \delta(t - \tau) = f(t - \tau)$

- Théorème de la convolution :

  - domaine temporel

    $f_1(t) \overset{TF}{\rightarrow} F_1(\omega)$; $f_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} F_2(\omega)$ et $f(t) \overset{TF}{\rightarrow} F(\omega)$;

    $$f(t) = f_1(t) \otimes f_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} F(\omega) = F_1(\omega) . F_2(\omega)$$

  - domaine fréquentiel

    $$f_1(t). f_2(t) \overset{TF}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi} = F_1(\omega) \otimes F_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int F_1(\Omega) . F_2(\omega - \Omega) d\Omega$$

4. Convolution de l'impulsion de Dirac

- $f(t) \otimes \delta(t) = f(t)$ $\delta(t)$ est l'élément neutre de la convolution.

- $f(t) \otimes \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

- $\delta(t - t_1) \otimes \delta(t - t_2) = \delta(t - (t_1 + t_2))$

- $\delta(t - t_1) \otimes \delta'(t - t_2) = \delta'(t - (t_1 + t_2))$

- $\delta'(t - t_1) \otimes \delta'(t - t_2) = \delta''(t - (t_1 + t_2))$

- $\delta^{(n)}(t - t_1) \otimes \delta^{(m)}(t - t_2) = \delta^{(n+m)}(t - (t_1 + t_2))$

Exemple

En utilisant la convolution et ses propriétés, calculer la TF de t.U(t)

$f_1(t) = t$ et $f_2(t) = U(t)$

$$f_1(t). f_2(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) \otimes F_2(\omega)$$

$$F_1(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\partial(\omega) \quad \text{et} \quad F_2(\omega) = j2\pi\,\partial'(\omega)$$

$$t. U(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} [\left(j2\pi\,\partial'(\omega) \otimes \frac{1}{j\omega}\right) + (j2\pi\,\partial'(\omega) \otimes \pi\,\partial(\omega))]$$

$$j2\pi\,\partial'(\omega) \otimes \pi\,\partial(\omega) = 2\pi^2 j\ \partial'(\omega)$$

$$j2\pi\,\partial'(\omega)\ \otimes\ \frac{1}{j\omega} = \frac{2\pi}{(j\omega)^2}$$

$$t.\,U(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} \frac{1}{(j\omega)^2} + \pi j\,\partial'(\omega)$$

5. Déconvolution

Connaissant le signal d’entrée e(t) et le signal de sortie s(t) d’un système linéaire, peut-on déduire sa réponse impulsionnelle. C’est le problème d’identification de processus.

Connaissant la réponse impulsionnelle h(t) et le signal de sortie s(t) d’un système linéaire, peut-on obtenir le signal d’entrée e(t). C’est le problème de la déconvolution.