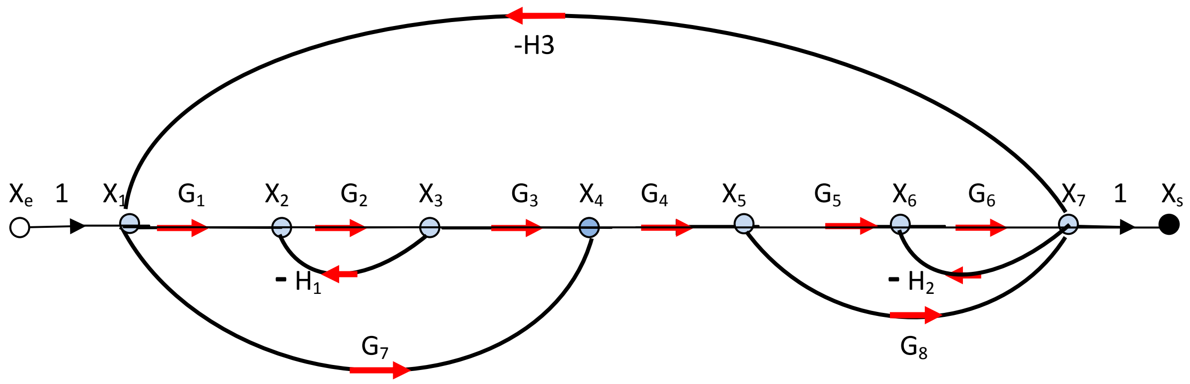
Université de Jijel
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Electrotechnique
L3 Electrotechnique, Systèmes Asservis, EMD, 03/03/2021

EXO : 1

Soit le système asservi donné par le graphe de fluence ci-dessous :
On demande de déterminer :

a) Les chaines d'actions et leurs gains ;
b) Les boucles et leurs gains ;
c) Les boucles disjointes 2 à 2 et le produit de leurs gains ;
d) Le déterminant du graphe complet Δ ;
e) Les cofacteurs correspondants (Δi) ;
f) Le gain entre l'entrée et la sortie.



EXO : 2

1) Soit le système donné par sa fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$F_0(P) = \frac{k}{(P+2)(P+3)}$$

a) Tracez le lieu de Nyquist de ce système.
b) Le système est il stable en boucle ouverte. justifiez votre réponse.
c) Le système est il stable en boucle fermée, justifiez votre réponse.

2) Etudiez la stabilité du système donné par son équation caractéristique en fonction du paramètre « k ». $k P^4 + 2P^3 + k(P^2+1) + P - 3 = 0$

3) Déterminez la transformée de Laplace inverse de $G(P) = \frac{(p+2)}{P(P+2)^2(P+3)}$

EXO : 3

Soit le système asservi linéaire donné par sa FTBO suivante :

$$G_0(P) = \frac{25(1+0.1P)}{P(1+0.05P)(1+0.008P)(1+0.005P)}$$

1) Tracez le diagramme de Bode, gain et phase, (indiquer la pente pour chaque tronçon) ;
2) Déterminer la marge de phase φ_m sachant que la fréquence de coupure ω_c**=43** rd/s
3) Le système est il stable en boucle ouverte ? pourquoi ?
4) Le système est il stable en boucle fermée ? justifiez (graphiquement) votre réponse.
5) Déterminer la marge de gain A_m sachant la fréquence d'inversion de la phase ω_π **=168 rd/s**,

Barème 6 7 7 Bonne chance Pr. M. Lefouili

Solution détaillée de l'EMD du 03/03/2021

EXO 1 : (07 points)

1) **Les chaines d'actions** et leurs gains : il y a quatre chaines d'actions (0.5)

$X_eX_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_s$ est une chaine d'action, de gain $\rightarrow P_1= G_1G_2G_3G_4G_5G_6$

$X_eX_1X_4X_5X_6X_s$ est une chaine d'action, de gain $\rightarrow P_2=G_7G_4G_5G_6$

$X_eX_1X_2X_3X_4X_5X_7X_s$ est une chaine d'action, de gain $\rightarrow P_3= G_1G_2G_3G_4X_8$

$X_eX_1X_4X_5X_7X_s$ est une chaine d'action, de gain $\rightarrow P_4=G_7G_4G_8$

2) **Les boucles** et leurs gains : il y a quatre boucles (1.0)

(1) $X_2X_3X_2$ de gain $\rightarrow -H_1G_2$

(2) $X_6X_7X_6$ de gain $\rightarrow -H_2G_6$

(3) $X_1X_2X_3X_4X_5X_6X_7X_1$ de gain $\rightarrow -H_3G_1G_2G_3G_4G_5G_6$

(4) $X_1X_4X_5X_7X_1$ de gain $\rightarrow -H_3G_7G_4G_8$

(5) $X_1X_4X_5X_6X_7X_1$ de gain $\rightarrow -H_3G_7G_4G_5G_6$

(6) $X_1X_2X_3X_4X_5X_7X_1$ de gain $\rightarrow -H_3G_1G_2G_3G_4X_8$

3) **Les boucles disjointes** (2 à 2) et le produit de leurs gains : il y a trois couples de boucles disjointes 2 à 2

Les boucles [(1) et (2)], le produit des gains $(-H_1G_2)*(-H_2G_4)= H_1G_2H_2G_4$

Les boucles [(1) et (4)], le produit des gains $(-H_1G_2)*(-H_3G_7G_4G_8)=H_1G_2H_3G_7G_4G_8$

Les boucles [(1) et (5)], le produit des gains $(-H_1G_2)*(-H_3G_7G_4G_5G_6)=H_1G_2H_3G_7G_4G_5G_6$ (1.5)

4) Le déterminant du graphe (1.0)

Δ=1-(somme de tous les gains des boucles)

+ (somme de tous les produits de gains 2 à 2 de boucles disjointes)-(.....)

$\Delta=1-(-H_1G_2 -H_2G_4 -H_3G_1G_2G_3G_4G_5G_6 -H_3G_7G_4G_8 -H_3G_7G_4G_5G_6 -H_3G_1G_2G_3G_4X_8)$

$+ (H_1G_2H_2G_4 +H_1G_2H_3G_7G_4G_8+ H_1G_2H_3G_7G_4G_5G_6)$

$=1+(H_1G_2 +H_2G_4 +H_3G_1G_2G_3G_4G_5G_6 +H_3G_7G_4G_8 +H_3G_7G_4G_5G_6+H_3G_1G_2G_3G_4X_8)$

$+ (H_1G_2H_2G_4 +H_1G_2H_3G_7G_4G_8+ H_1G_2H_3G_7G_4G_5G_6)$

5) **Les cofacteurs correspondants** Δi (4 parcourt donc 4 cofacteurs) (1.5)

$\Delta_1=1$ car toutes les boucles touchent P_1

$\Delta_2=1-(-H_1G_2)= 1 +H_1G_2$ la boucle (1) ne touche pas P_2

$\Delta_3=1$ car toutes les boucles touchent P_3

$\Delta_4=1-(-H_1G_2)= 1 +H_1G_2$ la boucle (1) ne touche pas P_4

6) Le gain entre l'entrée et la sortie

$$G(p) = \frac{X_s(p)}{X_e(p)} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_i\,\Delta_i}{\Delta} = \frac{P_1\,\Delta_1+P_2\,\Delta_2+P_3\,\Delta_3+P_4\,\Delta_4}{\Delta} = \quad (1.5)$$

$$= \frac{G_1G_2G_3G_4 * 1 + G_6P_4G_4 * (1+H_1G_2) + G_1G_2G_3G_7 * 1 + G_6G_7 * (1+H_1G_2)}{\Delta}$$

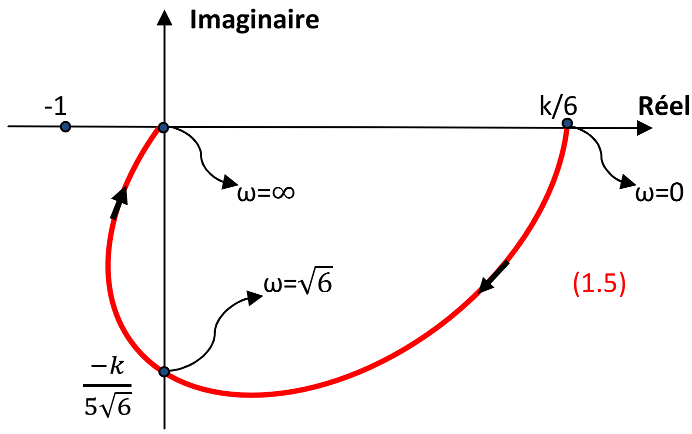
EXO 2 : (07 points)

1- **a) Lieu de Nyquist**

$$F_0(j\omega) = \frac{k}{(j\omega+2)(j\omega+3)} = \frac{k(6-\omega^2)}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} - j\,\frac{5k\omega}{(6-\omega^2)^2+25\omega^2} \quad (0.25)$$

ω	0	$\sqrt{6}$	∞
Réel de $F_0(j\omega)$	k/6	0	0
Imaginaire de $F_0(j\omega)$	0	$\frac{-k}{5\sqrt{6}}$	0

(0.25)



(1.5)

1-b) Le système est stable en boucle ouverte car il n'a que deux pôles et ils sont à parties réelles négatives (P_1=-2 et P_2=-3) (1.0)

1-c) Le système est stable en boucle fermée car son lieu de Nyquist $F_0(j\omega)$ quand ω varie de zéro à l'infini n'entoure pas le point (-1, 0j) (Critère du Revers. (1.0)

2) Etude de la stabilité de $k P^4 + 2P^3 + k(P^2+1) + P - 3 = 0$, l'équation caractéristique ordonnée sera

$$k P^4 + 2P^3 + k P^2 + P + k - 3 = 0$$

-La première condition du critère de Routh (les An de même signe), ce qui donne k>0 et k>3 (0.25)

-La deuxième condition du critère de Routh est tous les termes de la 1ere colonne de la table de Routh soient de même signes ;

P^4	k	k	k-3
P^3	2	1	0
P^2	b_1	b_2	
P^1	C_1	C_2	(0.25)
P^0	d_1		

$$b_1 = \frac{(2*k)-(k*1)}{2} = \frac{k}{2}; \quad b_2 = k-3;$$

$$C_1 = \frac{(b_1 * 1) - (2 * b_2)}{b_1} = \frac{\left(\frac{k}{2} * 1\right) - 2*(k-3)}{0.5\,k} = \frac{-1.5\,k + 6}{0.5\,k};$$

$$c_2 = 0; \quad d_1 = \frac{(C_1 * b_2) - (b_1 * C_2)}{C_1} = b_2 = k - 3;$$

La 1[ere] colonne de la table de Routh est (k, 2, k/2, $\frac{6-1.5\,k)}{0.5\,k}$, k-3), ses éléments seront de même signe si

$\left(k > 0\,, \frac{6-1.5\,k)}{0.5\,k} > 0 \text{ et } k-3 > 0\right)$ *donc le système sera asymptotiquement stable pour* $3 < K < 4$ (1)

3) Transformée de Laplace de $G(P) = \frac{(P+2)}{P(P+2)^2(P+3)} = \frac{1}{P(P+2)(P+3)}$

Nous avons trois pôles simples (P_1=0, P_2=-2 et P_2=-3)

Au pôle simple P_1=0 on aura

$$résidu_{p\to 0} = \lim_{p\to 0}(p+0)\frac{1}{P(P+2)(P+3)}e^{-0t} = \frac{1}{6}\,e^{-0t} = \frac{1}{6} \quad (0.25)$$

Au pôle simple P_2=-2 on aura

$$résidu_{p\to -2} = \lim_{p\to -2}(p+2)\frac{1}{P(P+2)(P+3)}e^{-2t} = -\frac{1}{2}\,e^{-2t} \quad (0.5)$$

Au pôle simple P_2=-3 on aura

$$résidu_{p\to -3} = \lim_{p\to -3}(p+3)\frac{1}{P(P+2)(P+3)}e^{-3t} = \frac{1}{3}\,e^{-3t} \quad (0.5)$$

f(t) =∑ résidus $=\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}\,e^{-3t}$ (0.25)

EXO 3 : (07 points) 1) Diagramme de Bode de : $G_0(j\omega) = \frac{25(1+j0.1\omega)}{j\omega(1+j0.06\omega)(1+j0.008\omega)(1+j0.005\omega)}$

Le gain

$$A_{dB}(\omega) = 20\log|G_0(j\omega)| = 20\log 25 + 20\log\sqrt{1+(0.1)^2\omega^2} - 20\log\omega - 20\log\sqrt{1+(0.05)^2\omega^2}$$

$$-20\log\sqrt{1+(0.008)^2\omega^2} - 20\log\sqrt{1+(0.005)^2\omega^2} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$$

La phase

$$\varphi_1(\omega) = arctg\left[\frac{0}{25}\right] = arctg 0 = 0;$$

$$\varphi_2(\omega) = arctg\left[\frac{0.1\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_2(0) = 0,\ \ \varphi_2(10) = +\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_2(\infty) = +\pi/2$$

$$\varphi_3(\omega) = -arctg\left[\frac{\omega}{0}\right] = -\pi/2$$

$$\varphi_4(\omega) = -arctg\left[\frac{0.05\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_4(0) = 0,\ \ \varphi_4(20) = -\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_4(\infty) = -\pi/2$$

$$\varphi_5(\omega) = -arctg\left[\frac{0.008\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_5(0) = 0,\ \ \varphi_5(125) = -\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_5(\infty) = -\pi/2$$

$$\varphi_6(\omega) = -arctg\left[\frac{0.005\omega}{1}\right] \Rightarrow \varphi_6(0) = 0,\ \ \varphi_6(200) = -\frac{\pi}{4},\ \ \varphi_6(\infty) = -\pi/2$$

1) La marge de phase : pour trouver la marge de phase on calcul : $\varphi_m = \varphi(\omega_c)+\pi$ avec ω_c= 43 rd/s

$$\varphi_m = 0 + arctg\left[\frac{0.1\omega_c}{1}\right] - \frac{\pi}{2} - arctg\left[\frac{0.05\omega_c}{1}\right] - arctg\left[\frac{0.008\omega_c}{1}\right] - arctg\left[\frac{0.005\omega_c}{1}\right] + \pi = 70.7 \quad (1.0)$$

2) Le système est stable en boucle ouverte car tous les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte (P_1=0, P_2=-1/0.05, P_2=-1/0.008, P_2=-1/0.005) sont à partie réelle négative. (1.0)

3) Le système est stable en boucle fermée car le lieu de Nyquist de sa fonction en boucle ouverte $G_0(j\omega)$ quand ω varie entre zéro et l'infini n'entoure pas le point critique (-1, 0j) Critère du revers (1.0)

4) La marge de gain : pour trouver la marge de gain on calcul : A_m= -20 Log$|G_0(j\omega_\pi)|$ avec ω_π= 168 rd/s

$$A_m = -20\log|G_0(j\omega_\pi)| = -20\log 25 - 20\log\sqrt{1+(0.1)^2\omega_\pi^{\ 2}} + 20\log\omega_\pi + 20\log\sqrt{1+(0.05)^2\omega_\pi^{\ 2}} + 20\log\sqrt{1+(0.008)^2\omega_\pi^{\ 2}} + 20\log\sqrt{1+(0.005)^2\omega_\pi^{\ 2}} = 17.4\text{ dB} \quad (1.0)$$