Université 8 Mai 1945 - Guelma

Dr HITTA Amara

Cours Algèbre et Analyse I

Conformément aux programmes

LMD : DEUG I–MI/ST– 2008/2009

Mathématiques et informatique

Exercices Corrigés

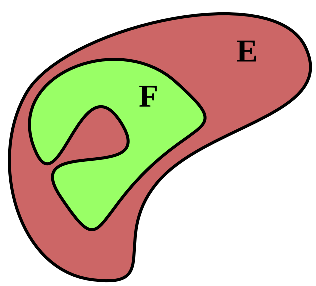
Faculté des Sciences et de l'Ingénierie

Chapitre 1

Théorie des Ensembles et relations

1.1 Opérations sur les ensembles

Définition. *Un ensemble F est* **inclus** *dans un ensemble E, lorsque tout élément de F appartient à E et on écrit $F \subset E$. Si $F \subset E$ et $E \neq F$, l'inclusion est dite* **stricte** *ou que F est une* **partie propre** *de E et on note $F \subsetneq E$.*



Lorsqu'il existe au moins un élément de F n'appartenant pas à E alors F n'est pas inclus dans E et on écrit $F \not\subset E$.
D'autre part, deux ensembles E et F sont égaux si et seulement si chacun est inclu dans l'autre, c'est à dire :

$$\boxed{E = F \text{ si et seulement si } E \subset F \text{ et } F \subset E.}$$

On admet, par ailleurs, l'existence d'un ensemble unique n'ayant aucun élément appelé **ensemble vide** et contenu dans n'importe quel ensemble. On le note $\emptyset$. Les symboles $\in$ et $\subset$ sont de nature différente :

① Le symbole $\in$ est une relation entre un élément et un ensemble; $x \in E$.

② Le symbole $\subset$ exprime l'inclusion d'un ensemble dans un autre; $\{x\} \subset E$.

☞ **Exemple 1.1.1** On a $\{x \in \mathbb{Z}; x^2 = 1\} = \{-1, +1\} \subset \mathbb{Z}$. D'autre part, $2 \in \mathbb{N}$ par contre $\{2\} \subset \mathbb{N}$. Comme $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Z} \neq \mathbb{R}$ alors $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$. ◆

Certains ensembles de référence sont formés par construction à partir de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$:

- L'ensemble $\mathbb{Z}$, des entiers relatifs, est construit pour résoudre les équations de la forme $x + a = b$, $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $a > b$.

- La considération de l'équation $ax = b$, a et $b \in \mathbb{Z}^*$, nous conduit à une extension de $\mathbb{Z}$ par l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels :
  En effet, un problème aussi simple que la résolution de l'équation $x^n = a$, $a \in \mathbb{Q}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, n'admet pas de solutions en général dans $\mathbb{Q}$. Plus précisément, pour $n = 2$:

  ☞ **Exemple 1.1.2** L'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Q}$. ◆

- Mais, on sait former deux suites de nombres de rationnels l'une croissante, notée (x_n) : $x_1 = 1,4$, $x_2 = 1,41$, $x_3 = 1,414, \cdots$ et l'autre décroissante, notée (y_n) : $y_1 = 1,5$, $y_2 = 1,42$, $y_3 = 1,415, \cdots$ telles que $2 - x_n^2$ et $y_n^2 - 2$ soient aussi petits qu'on le veut pour n suffisament grand avec $x_n^2 < 2 < y_n^2$. Ces deux suites de nombres rationnels définissent un même nombre désigné par $\sqrt{2}$.

  Reste à montrer que $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ n'est pas un nombre rationnel.

  ☞ **Exemple 1.1.3** $\boldsymbol{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$: Supposons qu'il s'ecrit sous forme rationnel c'est-à-dire $\sqrt{2} = p/q$ où p et q sont premiers entre eux, donc $p^2 = 2q^2$, 2 divise p car p et p^2 ont la même parité. Il en résulte que 4 divise p^2. Il existe alors p' tel que $p^2 = 4p'$, d'où $q^2 = 2p'$ c'est-à-dire 2 divise p et q ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux. De même $\boldsymbol{\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}}$ car si $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$ est rationnel, alors $\sqrt{3} = \sqrt{2} + (1/r)$ donc $3 = 2 + 2(1/r)\sqrt{2} + (1/r^2)$ et $\sqrt{2}$ serait rationnel. Contradiction. ◆

- Un autre exemple intéressant est à signaler. Il s'agit du calcul de la circonférence C d'un cercle de diamètre $d \in \mathbb{Q}$, qui n'est pas un élément de $\mathbb{Q}$ c'est-à-dire que $C/d = \pi \notin \mathbb{Q}$. De plus $\pi^2 \notin \mathbb{Q}$ car π ne peut être solution d'aucune équation de la forme $x^2 = q$, $q \in \mathbb{Q}$. En fait π ne vérifie aucune équation polynômiale à cœfficients rationnels de la forme $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ où $a_0 \neq 0$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Q}$.

  Un nombre vérifiant une équation de la forme précédente est dit . Dans le cas contraire, il est dit **nombre transcendant** :

Les rationnels et les irrationnels forment l'ensemble $\mathbb{R}$.

☞ **Exemple 1.1.4** Le nombre π est transcendant. Les nombres $\sqrt{3}$ et $4/5$ sont des nombres algébriques puisqu'ils sont solutions respectives des équations $x^2 - 3 = 0$ et $5x - 4 = 0$. Le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est un nombre algébrique car il est solution de $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$. ◆

Il existe, par ailleurs, un procédé dû au Mathématicien Allemand R. Dedekind, utilisé pour passer des nombres rationnels aux nombres réels. C'est la notion de **coupure** dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.

On construit, enfin, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour donner un sens aux racines des équations du second degré dont le déscriminant est négatif et qui n'ont pas, de ce fait, de solutions dans $\mathbb{R}$. En récapitulant, on a les inclusions suivantes

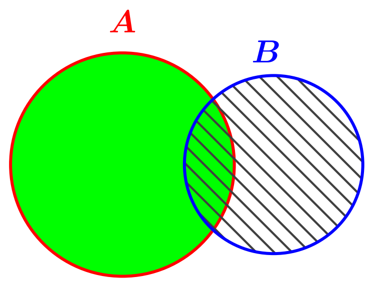
$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.}$$

A partir d'un ensemble E, on peut édicter certaines règles permettant de construire de nouveaux ensembles. Ainsi, on peut classer tous les éléments de E en sous-ensembles. Cette opération s'appelle **partition** de l'ensemble E. On forme un nouveau ensemble appelé **ensemble des parties** de E, noté $\mathcal{P}(E)$, caractérisé par la relation suivante :

$$\boxed{A \in \mathcal{P}(E) \text{ si et seulement } A \subseteq E.}$$

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide, car il contient au moins E et l'ensemble vide.

Réunion et intersection de deux ensembles :



On appelle **réunion** de deux ensembles A et B, noté $A \cup B$, l'ensemble formé des éléments x appartenant à A ou B c'est-à-dire $x \in A \cup B$ si et seulemet si $x \in A$ ou (inclusif) $x \in B$.

On appelle **intersection** de deux ensembles A et B, noté $A \cap B$, l'ensemble formé des éléments x appartenant à A et B c'est-à-dire $x \in A \cap B$ si et seulement si $x \in A$ et $x \in B$. **[Partie commune hachurée et coloriée].**

Deux ensembles sont dits **disjoints** si leur intersection est égale à l'ensemble vide. Deux propositions sont dites **contradictoires** si l'une des deux est vraie et les deux ne sont pas vraies en même temps (ou exclusif).

☞ **Exemple 1.1.5** Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, on a $\mathcal{D}(24) \cup \mathcal{D}(16) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\}$ et $\mathcal{D}(24) \cap \mathcal{D}(16) = \{1, 2, 3, 4, 8\}$. Par contre les sous-ensembles $\mathcal{D}(7)$ et $\mathcal{D}(16)$ sont disjoints. ◆

Les propriétés essentielles qui relient l'intersection et la réunion sont résumées dans les deux propositions qui suivent.

Proposition 1.1.1 Soient A, B et C trois parties de E, on a :

$$\boxed{\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}}$$

On dit que l'intersection est **distributive** par rapport à la réunion et vice-versa.

Preuve : Fixons $x \in A \cap (B \cup C)$ on a $[x \in A$ et $x \in B \cup C]$, d'où $(x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C)$ soit que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, d'où l'inclusion dans un sens. Dans l'autre sens, considérons x élément du second terme, alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Dans les deux cas, on a $x \in A$ et $x \in B \cup C$, ce qu'il faut démontrer. La deuxième égalité se démontre de la même façon. ◆

Définition. *On appelle* **ensemble complémentaire** *de $A \in \mathcal{P}(E)$, noté $\complement_E A$, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, c'est-à-dire*

$$\boxed{\complement_E A = \{x \in E / x \notin A\}.}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur E, le complémentaire de A dans E sera noté A^c.

Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on notera par $A \setminus B$, **la différence de A et B**, l'ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B, donc $A \setminus B = \{x \in E : \ x \in A \textbf{ et } x \notin B\}$. On définit de même la différence $B \setminus A$. En particulier : $E \setminus A = \complement_E A = A^c$.

☞ **Exemple 1.1.6** Dans $\mathbb{N}$, si l'on désigne par $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de l'entier naturel n, on aura $\mathcal{D}(24) \setminus \mathcal{D}(16) = \{3, 6, 12, 24\}$ et $\mathcal{D}(16) \setminus \mathcal{D}(24) = \{16\}$. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est formé par les nombres irrationnels comme le nombre π. ◆

Proposition 1.1.2 Soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$, alors

$$\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{et} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.}$$

Preuve : On va montrer la première égalité. Soit $x \in (A \cap B)^c$ alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $[x \in A^c$ ou $x \in B^c]$ soit que $x \in A^c \cup B^c$. Inversement, si $x \in A^c \cup B^c$ alors $[x \notin A$ ou $x \notin B]$ soit que $x \notin A \cap B$ et $x \in (A \cap B)^c$. La deuxième égalité est un exercice. ◆

Définition. *On appelle* **partition** *de E toute famille $\mathcal{F} = (E_i)_{i \in I}$ formée de parties non vides de E, qui vérifie les 2 conditions suivantes :*

- ✧ *Les parties sont deux à deux disjointes c'est-à-dire $\forall i \neq j \in I, \ E_i \cap E_j = \emptyset$.*
- ✧ *Leurs réunion est égale à E c'est-à-dire $E = \bigcup_{i \in I} E_i$.*

☞ **Exemple 1.1.7** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ un ensemble non vide. La famille $\mathcal{F} = \{A, A^c\}$ est une partition de E. ◆

Définition. *On appelle* **produit** *de deux ensembles E et F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in E$ et $y \in F$ c'est-à-dire* $E \times F = \{(x, y)/x \in E \text{ et } y \in F\}$.

Soit $a = (x, y) \in E \times F$, x est dit **la première** projection de a, et y est dit **la deuxième** projection de a et on note : $a = (x, y) \in E \times F$ si et seulement si $x = \mathrm{pr}_1 a$ et $y = \mathrm{pr}_2 a$.
Deux couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont égaux si et seulemnt si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
Lorsque $E = F$, on note par E^2 le **carré cartésien** $E \times E$. L'ensemble des couples $\Delta_E = \{(x, x) \in E^2 : x \in E\}$ est dit **diagonale** du carré cartésien $E \times E$.

Plus généralement, on définit le produit cartésien de n ensembles $E_1, E_2, \cdots, E_n$ par

$$\prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, \cdots, x_n)/ \ \forall i = 1, \cdots, n, \ x_i \in E_i\}.$$

Les projections dans le cas général, sont exprimées ainsi $a = (x_1, \cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ si et seulement si $x_i = \mathrm{pr}_i a$, $1 \leq i \leq n$.

Proposition 1.1.3 Pour $(A, B) \in [\mathcal{P}(E)]^2$ et $(C, D) \in [\mathcal{P}(F)]^2$, on a les relations suivantes

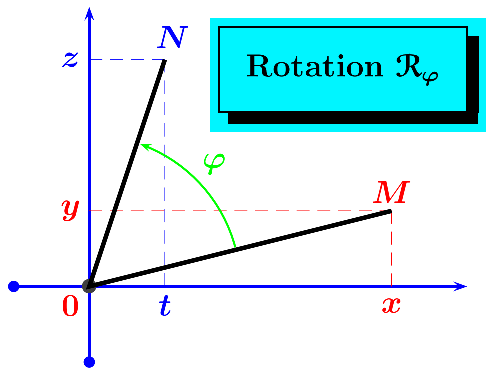
$$\begin{array}{rcl} (A \times C) \cup (B \times C) & = & (A \cup B) \times C. \\ (A \times C) \cup (A \times D) & = & A \times (C \cup D). \\ (A \times C) \cap (B \times D) & = & (A \cap B) \times (C \cap D). \end{array}$$

Preuve : Montrons la première égalité, les deux autres se traitent de la même façon

$$\begin{array}{rcl} (A \times C) \cup (B \times C) & = & \{(x, y) : (x, y) \in A \times C \ \underline{\text{ou}} \ (x, y) \in B \times C\} \\ & = & \{(x, y) : (x \in A \text{ et } y \in C) \ \underline{\text{ou}} \ (x \in B \text{ et } y \in C)\} \\ & = & \{(x, y) : (x \in A \ \underline{\text{ou}} \ x \in B) \text{ et } y \in C)\} = (A \cup B) \times C. \end{array}$$ ◆

1.2 Applications et fonctions

Définition. *Etant donnés un ensemble E, un ensemble F et une loi de correspondance f associant à chaque élément x de E un élément y de F, f est dite* **application** *de E dans F et on note :* $x \in E \xrightarrow{f} y = f(x) \in F$.
L'ensemble E est dit ensemble de **départ** et F est dit ensemble **d'arrivée**. L'élément x est dit l' **antécédent** et y est dit l' **image** de x par f.
L'application f est dite **fonction** si, pour chaque $x \in E$, il existe un **unique** $y \in F$ tel que $f(x) = y$.



☞ **Exemple 1.2.1** La rotation de centre O et d'angle φ, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine 0, est une application $\mathcal{R}_\varphi$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui fait correspondre au point $M(x, y)$ le point $N(t, z)$ dont les coordonnées sont données par les formules

$$\begin{cases} t = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ z = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases}$$ ◆

✧ Si $A \subset E$, l' image **directe** de A par f est

$$\boxed{f(A) = \{\ f(x)/x \in A\ \} \subset F.}$$

✧ Si $B \subset F$, l' image **réciproque** de B par f est

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{\ x \in E/\ f(x) \in B\ \} \subset E.}$$

✧ On appelle **restriction** de f à $A \subset E$, l'application $f_{|_A} : A \to F$:

$$\boxed{f_{|_A}(x) = f(x),\ \forall\ x\ \in\ A.}$$

✧ On appelle **prolongement** de f à un ensemble E' contenant E, toute application g de E' vers F dont la restriction est f.

☞ **Exemple 1.2.2** Soit f l'application définie par $f(x) = \sin(x)$ de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +1]$. Lorsque f est définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$, alors $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$ et $f^{-1}(-1) = \emptyset$.

☞ **Exemple 1.2.3** Soit f l'application définie par $f(x) = \sin(\pi x)$. Son image est $f(\mathbb{R}) = [-1, +1]$. Sa restriction à l'ensemble $\mathbb{Z}$ a pour image $f(\mathbb{Z}) = 0$. Les images réciproques par f de 0 et 1 sont respectivement

$$f^{-1}(0) = \mathbb{Z} \quad \text{et} \qquad f^{-1}(1) = \left\{2k + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}. ◆$$

☞ **Exemple 1.2.4**

Fonctions usuelles

La fonction **tangente** est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ par tg $: x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$.
La fonction **sinus** (resp. **cosinus**) **hyperbolique**, notée sh (resp. ch), est définie pour chaque réel x par sh $x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (resp. ch $x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$).
La fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout couple (x, y) par $f(x, y) = |x| + |y|$ est dite fonction à deux variables. ◆

Soient E, F et G trois ensembles et f et g deux applications telles que

$$\boxed{\begin{tikzcd} x \in E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & f(x) \in F \arrow[r, "g"] & g[f(x)] \in G \end{tikzcd}}$$

On peut en déduire une application de E dans G notée $g \circ f$ et appelée application **composée** de f et g, par $g \circ f(x) = g[f(x)], \forall\, x \in E$.

En général, on a $g \circ f \neq f \circ g$. Il suffit de considérer les fonctions réelles $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$.

Par contre la composition des applications est associative

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.}$$

Si f est une application de E dans lui même, on pourra définir par récurrence **la puissance** $n^{ième}$ de f par $f^2 = f \circ f$ et $f^n = f^{n-1} \circ f = f \circ f^{n-1}$.

Le **graphe** d'une application f de E dans F est le sous-ensemble $\mathcal{C}_f$ du produit $E \times F$ formé par les couples $(x, f(x))$ quand x décrit l'ensemble de départ E.

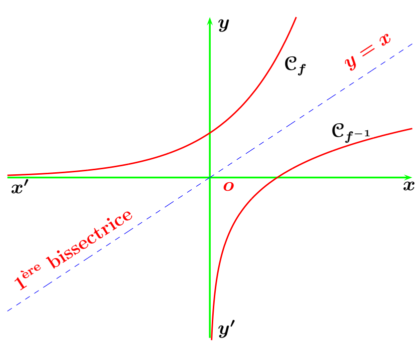
Définition. *Soit $f : E \to F$. On dit que f est* **injective** *si et seulement si : pour tout $(x, y) \in E^2$, l'égalité $f(x) = f(y)$ implique $x = y$.*

On dit que f est **surjective** *si et seulement si : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.*

On dit que f est **bijective** *(ou f est une* **bijection** *de E sur F) si et seulement si : f est à la fois injective et surjective.*

☞ **Exemple 1.2.5** La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x^2$ n'est ni injective, ni surjective; sa restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ est injective. La fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$, qui à un réel x associe $f(x) = x^2$ est surjective. Sa restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ est bijective.

Si la fonction f est bijective, et seulement dans ce cas, à tout $y \in F$ on fait correspondre un $x \in E$ et **un seul**. On définit ainsi une application, notée $f^{-1} \; : y \in F \to x \in E$, et appelée application **réciproque** de f qui est bijective, et on a l'équivalence $y = f(x)$ si et seulement si $x = f^{-1}(y)$.



Remarque : Si la fonction f est numérique, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ ont les allures ci-contre. Elles sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$. Donc :

$$\boxed{(x, y) \in \mathcal{C}_f \iff (y, x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}.}$$

On vérifie ainsi les relations suivantes

$$\boxed{f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \text{ et } f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.}$$

Proposition 1.2.1 Soient E, F deux ensembles quelconques et une application $f : E \longrightarrow F$. Pour tous $(A, B) \in [\mathcal{P}(E)]^2$ et $(X, Y) \in [\mathcal{P}(F)]^2$, on a les propriétés suivantes sur les images directe et réciproque par f:

- $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$ et $X \subset Y \Longrightarrow f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$
- $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f^{-1}(X \cap Y) \subset f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$
- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$
- $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(X)) \subset X$.

La preuve est laissée comme exercice.

Théorème 1.2.2 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications quelconques.

- Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective c-à-d.

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.}$$

Preuve : Comme g sont injective, alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$ entraine $f(x) = f(y)$. Ce qui entraine à son tour $x = y$. Si f et g sont surjectives, alors $f(E) = F$ et $g(F) = G$. Donc $(g \circ f)(E) = g[f(E)] = g(F) = G$. D'où la surjectivité de $g \circ f$. La dernière assertion découle des deux premières. ◆

1.3 Lois de composition

La structure d'un ensemble, fini ou infini, peut-être caractérisée par une ou plusieurs lois internes ou externes dites **lois de composition**.
Dans ce paragraphe nous allons étudier les opérations algébriques indépendamment des objets mathématiques de l'ensemble auxquels elles sont susceptibles de s'appliquer.

Soient E et $\mathbb{K}$ deux ensembles quelconques.

> **Définition.** *On appelle loi de composition* **interne** *sur E une application de $E \times E$ dans E qui à (x, y) associe $x * y$. On dit qu'on a une loi de composition* **externe** *de $\mathbb{K}$ sur E si on se donne une application $\mathbb{K} \times E$ dans E qui à (β, x) associe βx. Dans ce cas, on dit que* **$\mathbb{K}$ agit sur E**.

☞ **Exemple 1.3.1** Les lois de composition définies par l'addition et la multiplication sur les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des lois internes. Soit E un ensemble quelconque. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$, les lois de composition $(X, Y) \rightarrow X \cup Y$ et $(X, Y) \rightarrow X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$ sont des lois internes sur $\mathcal{P}(E)$. ◆

Dans l'ensemble $\mathbb{N}$, considérons la loi qui à chaque couple $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ associe x^y. Suposons que l'on se donne trois entiers naturels x, yn et z, les entiers $(x^y)^z$ et $x^(y^z)$ ne sont pas nécessairement égaux, comme on peut facilemnt le constater.

Soient $x, y, z \in E$ et $*$ une loi interne sur E.

La loi $*$ est dite **associative** si :

$$\boxed{(x * y) * z = x * (y * z).}$$

On définit par récurrence le composé de n éléments $x_1, x_2, \cdots, x_n$ d'un ensemble E par $x_1 * (x_2 * (\cdots (x_{n-1} * x_n) \cdots))$. L'associativité permet d'effectuer le calcul dans E sans se soucier de la succession des opérations imposées par la définition précédente.

La loi $*$ est dite **commutative** si :

$$\boxed{x * y = y * x.}$$

La loi $*$ admet sur E un **élément neutre**, noté e, si pour tout $x \in E$ on a :

$$\boxed{x * e = e * x = x.}$$

Unicité : L'élément neutre , lorsqu'il existe, est unique. En effet, supposons que e' est un autre élément neutre pour la loi $*$, alors $e' = e' * e = e * e' = e$. ◆

L'élément $x \in E$ admet un **élément symétrique**, noté, x' si la loi $*$ admet un élément neutre e et si

$$\boxed{x * x' = x' * x = e.}$$

Unicité : Le symétrique x' de $x \in E$ est unique pour la loi $*$. En effet, soit x'' un deuxième élément symétrique de x. En utilisant l'associativité de la loi $*$, on obtient $x' = e * x' = (x'' * x) * x' = x'' * (x * x') = x'' * e = x''$. ◆

☞ **Exemple 1.3.2** Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ on définit la loi de composition $\otimes$, dite somme disjonctive de X et $Y \in \mathcal{P}(E)$, par $X \otimes Y = (X \cap Y^c) \cup (Y \cap X^c)$. On vérifie que cette loi est bien interne, commutative, associative, admet pour élément neutre l'ensemble vide et chaque élément est son propre symétrique. ◆

Soient $\circ$ et $*$ deux lois de composition internes définies sur E et x, y, z trois éléments quelconques de E.

On dit que $\circ$ est par rapport à la loi $*$ si l'on a

$$\boxed{\begin{array}{rcl} (x * y) \circ z & = & (x \circ z) * (y \circ z) \\ z \circ (x * y) & = & (z \circ x) * (z \circ y). \end{array}}$$

Si les deux lois ne sont pas commutatives, on prendra bien soin de ne pas modifier l'ordre des termes.

Un entre deux ensembles E et F munis de deux lois internes $*$ et $\circ$, est une application $f : (E, *) \longrightarrow (F, \circ)$ qui vérifie, pour tous x_1 et $x_2 \in E$, la relation

$$\boxed{f(x_1 * x_2) = f(x_1) \ \circ \ f(x_2)}$$

Une bijection $(E, *)$ sur $(F, \circ)$ est un homomorphisme bijectif de $(E, *)$ dans $(F, \circ)$.

☞ **Exemple 1.3.3** La bijection $x \longrightarrow e^x$ de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, .)$ est un homomorphisme qui fait correspondre à l'addition sur $\mathbb{R}$ la multiplication sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, la bijection $x \longrightarrow \ell\text{n}x$ de $(\mathbb{R}_+^*, .)$ sur $(\mathbb{R}, +)$ fait correspondre la multiplication sur $\mathbb{R}_+^*$, l'addition sur $\mathbb{R}$. On a alors $e^{x+y} = e^x.e^y$ et $\ell\text{n}(x.y) = \ell\text{n}x + \ell\text{n}y$.◆

1.4 Relation d'équivalence

Définition. *Soit $\mathcal{R}$ une* **relation binaire** *sur E. Pour tous $x, y, z \in E$, $\mathcal{R}$ est dite :*

- ✧ *Réflexive si : $x\mathcal{R}x$ c-à-d. chaque élément est en relation avec lui-même.*
- ✧ *Symétrique si : $x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.*
- ✧ *Transitive si : $[x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$. Si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z.*
- ✧ *Anti-symétrique si :*

  $[x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.

La relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** *si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Dans ce cas, on appelle* **classe d'équivalence** *d'un élément x de E, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par $\mathcal{R}$, notée*

$$\boxed{\mathcal{C}(x) = \{y \in E : y\mathcal{R}x\}.}$$

La classe d'équivalence $\mathcal{C}(x)$ est non vide car $\mathcal{R}$ est réflexive et contient de ce fait au moins x. On notera par

$$\boxed{E/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}(x)/x \in E\}}$$

l'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation $\mathcal{R}$.

☞ **Exemple 1.4.1** Dans l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, on définit la relation de congruence modulo 3 par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y = 3k$ (congruence modulo 3). Les classes d'équivalence sont, ainsi, formées par les restes de la division par 3, qui sont $\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \mathcal{C}(2)$. Leurs ensemble est noté $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_3$. En général, pour n entier naturel non nul, la relation $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe un entier k tel que $x - y = nk$ est une relation d'equivalence. Leurs ensemble est $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1), \cdot, \mathcal{C}(n-1)\}$. ◆

☞ **Exemple 1.4.2** On considère maintenant la relation suivante sur $\mathbb{R}$: $x\mathcal{R}y$ si et seulement $x^3 - y^3 = x - y$. La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$ est l'ensemble $\mathcal{C}(a) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - a^3 = x - a\}$ qui contient a et les racines du trinôme $T(x) = x^2 + ax + a^2 - 1$. ◆

Théorème 1.4.1 Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence $(\mathcal{C}(x))_{x\in E}$ constituent une partition de E.

Preuve : Les classes sont deux à deux disjointes. En effet, si $\alpha\mathcal{R}\beta$ et si $x \in \mathcal{C}(\alpha)$ alors $x\mathcal{R}\beta$ et $x \in \mathcal{C}(\beta)$ ceci implique que $\mathcal{C}(\alpha) \subset \mathcal{C}(\beta)$. On vérifie de la même façon l'inclusion inverse. Donc si α et β ne sont pas en relation alors $\mathcal{C}(\alpha) \cap \mathcal{C}(\beta) = \emptyset$ et les classes $[\mathcal{C}(x)]_{x\in E}$ sont disjointes deux à deux. D'autre part, pour tout $x \in E$ on a $x \in \mathcal{C}(x)$ donc $E \subset \bigcup\limits_{x\in E} \mathcal{C}(x)$ d'où $E = \bigcup\limits_{x\in E} \mathcal{C}(x)$. ◆

On traite maintenant la décomposition canonique d'une application entre deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ associée à l'application f par

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

L'application f se décompose comme le montre le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ E/\mathcal{R} \arrow[r, "\bar{f}"'] & f(E) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

L'intérêt de cette décomposition consiste à remplacer l'application f, qui est quelconque, par :

- La surjection π de E sur $E/\mathcal{R}$ définie par $\pi(x) = \mathcal{C}(x) = \{x' \in E : f(x) = f(x')\}$.
- La bijection $\bar{f}$ de $E/\mathcal{R}$ sur $f(E)$ définie par $\bar{f}(\mathcal{C}(x)) = f(x)$. En fait, $\bar{f}$ est surjective par définition. D'autre part, $f(x) = f(y)$ entraine $x\mathcal{R}y$ soit que $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$ d'où l'injectivité de $\bar{f}$.
- L'injection canonique i de $f(E)$ dans F.

On obtient ainsi la **factorisation canonique** de l'application f suivant $\mathcal{R}$

$$\boxed{f = i \circ \bar{f} \circ \pi.}$$

☞ **Exemple 1.4.3** Dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par

$$x\ \mathcal{R}\ y \Longleftrightarrow x\ell\mathrm{n}y = y\ell\mathrm{n}x \Longleftrightarrow \frac{\ell\mathrm{n}x}{x} = \frac{\ell\mathrm{n}y}{y}.$$

Cette relation est donc $\mathcal{R}$ est associée à l'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ell\mathrm{n}x/x$. Le tableau de variations de f et son graphe dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, nous donne pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les classes d'équivalence suivantes

$$\mathcal{C}(\alpha) = \begin{cases} \{\alpha\} & \forall\ \alpha \in]0,1[\cup\{e\} \\ \\ \{\alpha, \beta\} & \forall\ \alpha \in]1,e[,\ \beta > e \ \text{ et } \ \dfrac{\ell\mathrm{n}\alpha}{\alpha} = \dfrac{\ell\mathrm{n}\beta}{\beta}. \end{cases}$$

Ainsi : $\mathbb{R}_+^*/\mathcal{R} = \{\mathcal{C}(\alpha) :\ \alpha \in]0,e]\}$, il existe donc une bijection g entre $]0,e]$ et $\mathbb{R}_+^*/\mathcal{R}$. Comme les applications suivantes

$$\gamma = f_{|]0,e]} \quad :]0,e] \longrightarrow f(\mathbb{R}_+^*) = \left]-\infty, \frac{1}{e}\right] \quad \text{et} \quad f = \gamma \circ g^{-1} :\ \mathbb{R}_+^*/\mathcal{R} \longrightarrow f(\mathbb{R}_+^*)$$

sont des bijections, le diagramme commutatif de la décomposition de f sera

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_+^* \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}_+^*/\mathcal{R} \arrow[r, "\bar{f}"'] & \mathbb{R}_+ \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

où π est la surjection canonique de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*/\mathcal{R}$ définie par $\pi(x) = \mathcal{C}(x)$ et i l'injection canonique de $]-\infty, 1/e]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $i(x) = x$. ◆

☞ **Exemple 1.4.4** Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, d'une distance d et de l'application $\xi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\xi(M) = d(O, M)$. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{P}$ par $M \mathcal{R} N \Longleftrightarrow \xi(M) = \xi(N)$ c'est-à-dire M et N sont équidistants de l'origine O. On pose $\mathcal{C}(M)$ le cercle de centre O et de rayon $r = d(O, M)$. L'ensemble $\mathcal{P}/\mathcal{R}$ est formé des cercles de centre O et de rayon $r \in \mathbb{R}^*$. On obtient ainsi la décomposition suivante de ξ sous forme d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R} \\ \mathcal{P}/\mathcal{R} \arrow[r, "\bar{\xi}"'] & \mathbb{R}_+^* \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

avec $\pi : M \to \mathcal{C}(M)$, $\bar{\xi} : \mathcal{C}(M) \to d(O, M)$ et i l'injection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. ◆

1.5 Relation d'ordre

Définition. *Une relation $\mathcal{R}$ sur E est dite* **relation d'ordre** *si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.*

☞ **Exemple 1.5.1** Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation *"x divise y"*. Vérifions qu'elle est antisymétrique

$$\begin{aligned} x\mathcal{R}y &\Longleftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{N}^* : y = kx \\ y\mathcal{R}x &\Longleftrightarrow \exists\ k' \in \mathbb{N}^* : x = k'y, \end{aligned}$$

il vient que $kk' = 1$, comme k et $k' \in \mathbb{N}$, alors $k = k' = 1$ c'est-à-dire $x = y$. ◆

Définition. *Si X est une partie non vide de E muni de la relation d'ordre $\leq$.*

- *L'élément x_0 est* **le plus grand** *élément de X si et seulement si*

$$\boxed{\boldsymbol{x_0 \in X \text{ et } \forall x \in X \text{ on a } x \leq x_0.}}$$

- *L'élément x_0 est le* **majorant** *de X si et seulement si*

$$\boxed{\boldsymbol{x_0 \in E \text{ et } \forall x \in X \text{ on a } x \leq x_0.}}$$

- *L'élément x_0 est l'* **élément maximal** *de X si et seulement si*

$$\boxed{\boldsymbol{x_0 \in X,\ \forall x \in X,\quad \text{on a}\quad [x_0 \leq x \Longrightarrow x = x_0].}}$$

Si A admet un plus grand élément, celui-ci est le seul élément maximal de A. Dans le cas contraire A peut posséder plusieurs éléments maximaux. La borne supérieure de A est le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A, on le note $\sup_{x\in A}(x)$. Symétriquement, on définit sur A le plus petit élément, le **minorant**, l'**élément minimal** et $\boldsymbol{\inf_{x\in A}(x)}$.

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$. Les éléments a et b de E sont dits comparables si l'on a $[a\mathcal{R}b$ ou $b\mathcal{R}a]$. Si tout les éléments de E sont comparables par la relation $\mathcal{R}$, l'ensemble E est dit **totalement ordonné** par $\mathcal{R}$. Sinon, il est dit **partiellement ordonné**.

☞ **Exemple 1.5.2** L'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné. Par contre l'ensemble $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné si l'ensemble E a plus d'un élément. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$, on a

$$\boxed{\boldsymbol{\sup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A_i \quad \text{et} \quad \inf_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} A_i.}} \ ◆$$

Si l'ensemble E est totalement ordonné, on définit la notion d'intervalle comme dans l'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$. Un ensemble ordonné dont chaque couple d'éléments admet un élément supérieur et un élément inférieur est dit **treillis**. C'est le cas de l'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$.

✧ **Remarque :** Il n'existe pas d'élément strictement plus grand qu'un élément maximal. Un élément maximal ne peut être, la plupart des cas, le plus grand élément que si l'ensemble est totalement ordonné, auquel cas tout élément maximal est le plus grand élément.

✧ **Remarque :** Une relation non symétrique n'est pas pour cela antisymétrique, comme le témoigne la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \mathcal{R} y$ si $|x| \geq y$, qui n'est pas symétrique car $(3, 2) \in G_{\mathcal{R}}$, par contre $(2, 3) \notin G_{\mathcal{R}}$. Cette relation n'est pas antisymétrique non plus car $(-3, 2) \in G_{\mathcal{R}}$ et $(2, -3) \in G_{\mathcal{R}}$ mais $2 \neq -3$.

1.6 Construction des ensembles usuels

Pour définir l'ensemble $\mathbb{N}$, on adopte la méthode due à Peano (1858-1932) et Dedékind (1831-1916).

Une autre approche utilise les axiomes de Zermelo-Fraenkel.

✧ **Axiomes de Peano :** L'ensemble des **entiers naturels** est la donnée d'un ensemble $\mathbb{N}$ et d'une fonction $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\sigma(n) = n + 1$ et vérifiant les axiomes suivants

1. $0 \in \mathbb{N}$

2. σ est une injection

3. Aucun nombre n'admet 0 pour successeur c-à-d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sigma(n) \neq 0$

4. Si $\mathbb{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\sigma(\ A) \subset A$ et contenant 0, alors $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

Cet axiome se reformule ainsi :

✧ **Axiome de récurrence :** Soient $\mathbb{A}$ une partie de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une proposition vraie pour tout $n \in \mathbb{A}$. Si on a

1. **Initialisation** : $\mathcal{P}(0)$ est vraie

2. **Héridité** : $\forall n \in \mathbb{A}$, [$\mathcal{P}(n)$ vraie] $\Longrightarrow$ [$\mathcal{P}(n+1)$ vraie]. Alors $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

Dans ce cas, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

☞ **Exemple 1.6.1** Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$\boxed{s[n] = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

Initilisation au rang $n = 0$, comme $s[0] = 0$, la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Pour l'héridité, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie c-à-d. $s[n] = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Mais,

$$s[n+1] = s[n] + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. La propriété est initialisée au rang 0 et est hériditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ◆

☞ **Exemple 1.6.2** Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$\boxed{s[n^2] = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Par récurrence sur n, la formule est triviale si $n = 1$. **Héridité** : Supposons la vérifiée à l'ordre $n - 1$ c-à-d. :

$$s[(n-1)^2] = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

Alors

$$S[n^2] = s[(n-1)^2] + n^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

La récurrence est vérifiée à l'ordre n, donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. ◆

☞ **Exemple 1.6.3** Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx}$$

pour tout $x \geq -1$. Par récurrence, l'inégalité est triviale si $n = 1$. **Héridité :** Supposons que l'inégalité est vérifiée à l'ordre $n-1$ c-à-d. : $(1+x)^{n-1} > 1+(n-1)x$ pour tout $x > -1$. Donc, à l'ordre n, on vérifie que

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1}(1+x) > [1+(n-1)x](1+x) = 1+nx+(n-1)x^2 > 1+nx.$$

L'inégalité est ainsi vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. ◆

L'addition et la multiplication sur $\mathbb{N}$ sont définies, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, par

$$\begin{cases} m+n = \sigma^n(m) \\ m.n = (\sigma^m)^n(0). \end{cases}$$

L'application σ^n est la composition n fois de σ définie par

$$\sigma^0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \sigma^{n+1} = \sigma \circ \sigma^n.$$

Notons enfin une propriété importante des entiers naturels qui est une conséquence des axiomes de Peano, à savoir :

Pour tout ensemble non vide $\mathbb{A}$ d'entiers naturels, il existe un plus petit élément de $\mathbb{A}$ pour l'ordre usuel des entiers.

❋ Construction de $\mathbb{Z}$:

Dans $\mathbb{N}^2$ on définit la relation d'équivalence : $(a,b) \sim (c,d) \Longleftrightarrow a+d = b+c$. L'ensemble des classes d'équivalence est **l'ensemble des entiers relatifs** désigné par

$$\boxed{\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim.}$$

La classe du couple (a,b) sera notée $[a,b]$. On définira l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$ par

$$\begin{aligned} [a,b]+[c,d] &= [a+c, b+d] \\ [a,b]\times[c,d] &= [ac+bd, ad+bc], \end{aligned}$$

où a, b, c et $d \in \mathbb{N}$.

L'addition est commutative, associative et admet $[0,0]$ pour élément neutre que l'on identifiera par la suite avec $0 \in \mathbb{N}$. La multiplication est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition. L'ensemble $\mathbb{N}$ devient un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$ par l'injection $a \to \varphi(a) = [a,0]$. Une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$ est définie par $a \leq b \Longleftrightarrow b-a \in \mathbb{N}$.

❋ Construction de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$:

Dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on définira encore une relation d'équivalence (vérifiez !) par

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = bc.$$

Chaque classe d'équivalence est dite **nombre rationnel** et l'ensemble de ces classes sera noté

$$\boxed{\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim.}$$

On définira l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Q}$ par

$$\begin{aligned} [a, b] + [c, d] &= [ad + bc, bd] \\ [a, b] \times [c, d] &= [ac, bd]. \end{aligned}$$

En particulier $[0, a] = [0, 1]$ qui est l'élément neutre pour l'addition. Par contre $[1, 1]$ est l'élément neutre pour la multiplication. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on lui associe $[a, 1] \in \mathbb{Q}$, d'où $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

L'inverse pour la multiplication de $[p, 1]$ est $[1, p]$. On le notera par $1/p$, d'où

$$[p, q] = [p, 1] \times [1, q] = \frac{p}{q}.$$

La fraction $\frac{p}{q}$ est dite positive si p et q sont positifs. L'ensemble $\mathfrak{F}$ des fractions positives est stable par l'addition et la multiplication de fractions donc

$$\boxed{\mathbb{Q} = -\mathfrak{F} \cup \{0\} \cup \mathfrak{F}.}$$

La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ est définie ainsi

$$r \leq s \Longleftrightarrow s - r \in \mathfrak{F} \cup \{0\}.$$

Cet ordre est **Archimédien**, c'est à dire que

- **"Pour deux rationnels r et s, il existe un entier naturel n tel que $s < nr$".**

  En effet, soient $s = \frac{p}{h}$ et $r = \frac{q}{h}$ deux rationnels qui ont le même dénominateur commun, l'entier naturel n est choisi tel que $p < nq$.

  Une autre propriété de l'ensemble $\mathbb{Q}$ que $\mathbb{Z}$ ne vérifie pas, c'est sa *densité,* qui s'énonce par

- **Entre deux rationnels r et s, il existe un troisième à savoir, la moitié de leurs somme $t = \dfrac{r+s}{2}$.**

  En effet, Supposons que $s < t$. Ajoutons s aux deux membres de cette inéquation, on trouve $2s < s+t$ donc $s < \dfrac{s+t}{2}$. De même, en ajoutant t aux deux membres de l'inéquation $s < t$, on obtient $\dfrac{s+t}{2} < t$. Reste à montrer que $\dfrac{s+t}{2}$ est un nombre rationnel. Ce qui est facile à vérifier en écrivant s et t sous forme de fractions.

  Toutefois l'ensemble $\mathbb{Q}$, lui aussi, possède ses frontières. Ainsi il est impossible de répondre à la question :

- **"Quel est le nombre x qui mesure la diagonale d'un carrée de côté égal à l'unité ?"**

  En effet, le problème impose d'écrire $x^2 = 2$. Il n'existe aucun $x \in \mathbb{Q}$ - c'est à dire aucune fraction rationnelle - qui, multiplié par lui-même donne 2. Pour passer outre, il nous faut élargir l'ensemble $\mathbb{Q}$.
  Ainsi, Les suites (x_n) et (y_n) définies au début de ce chapitre définissent un même nombre non rationnel désigné par $\sqrt{2}$, dit **nombre irrationnel** , et qui vérifie l'équation $x^2 = 2$.

  Les nombres rationnels et irrationnels forment l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$.

1.7 Ensembles dénombrables

C'est en 1873, que Cantor posa un problème auquel nul n'avait songé, à savoir :

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est-il dénombrable ?

La réponse à cette question encouragea Cantor à consacrer une grande partie de sa carrière aux problèmes d'équipotence.

> **Définition.** *Un ensemble E est dit* **strictement dénombrable** *s'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$. On dit que E est* **dénombrable** *s'il est fini ou strictement dénombrable.*

Ceci revient à dire qu'un ensemble est dénombrable si c'est un ensemble dont on peut numéroter les éléments. L'existence de la bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$ permet de représenter $\varphi(n)$ par $a_n \in E$.

Proposition 1.7.1 Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

Preuve : Il suffit de faire la démonstration pour une partie infinie $\mathbb{B}$ de $\mathbb{N}$. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ qui à n associe b_n. Supposons que b_0 est le plus petit élément de $\mathbb{B}$ et b_n celui de $\mathbb{B} \setminus \{b_0, \cdots, b_{n-1}\}$ qui est non vide, sinon $\mathbb{B}$ est fini.
φ est injective : Si $p < q$ alors $b_q \notin \{b_0, \cdots, b_{p-1}\}$ donc $b_q \neq b_p$ et $\varphi(q) \neq \varphi(p)$.
φ est surjective : Supposons que φ ne soit pas surjective et soit $b \in \mathbb{B}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = b_n \neq b \quad \Longrightarrow \quad b \in \mathbb{B} \setminus \{b_0, \cdots b_{n-1}\}.$$

Donc, par définition $b_n \leq b$. D'autre part, $b_0 \leq b$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $b_n \leq b$. Mais l'intervalle $[0, b]$ est fini et $\varphi(n) \in [0, b]$ et comme φ est injective, alors $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \subset [0, b]$. Contradiction car $\mathbb{N}$ est infini. ◆

☞ **Exemple 1.7.1** L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est strictement dénombrable en considérant la bijection $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $s(n) = n + 1$. Toute partie de $\mathbb{N}$ est aussi dénombrable.

☞ **Exemple 1.7.2** Pour $\mathbb{Z}$, on considère la bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

☞ **Exemple 1.7.3** Le produit $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est strictement dénombrable. En effet, on peut écrire $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sous forme d'un tableau infini à double entrée en considérant l'application $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(p, q) = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$. on pourrait aussi utiliser la bijection $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\psi(n, p) = 2^n(2p + 1)$. C'est une surjection car tout nombre entier non nul s'écrit comme produit d'une puissance de 2 par un nombre impair et c'est une injection car cette écriture est unique. Par exemple on a $144 = 2^4 \times 9$ soit que $\psi(4, 4) = 144$ donc ψ est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$, d'où le résultat.

☞ **Exemple 1.7.4** L'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$ considéré comme une partie de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, est donc en bijection avec $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{Q}_+^*$ est infini, il est alors strictement dénombrable. Il y va de même pour l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.7.2 Soit f une surjection d'un ensemble dénombrable E dans un ensemble F quelconque. Si l'application f est surjective, Alors F est fini ou dénombrable.

Preuve : On se limite au cas où $E = \mathbb{N}$. Comme f est surjective, $\forall x \in F$, $f^{-1}(x)$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, soit $m(x)$ son plus petit élément. L'application $m : F \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifie $f \circ m = \mathrm{Id}_F$ donc m est injective. Il existe une bijection de F sur $m(F) \subset \mathbb{N}$, F est alors fini ou dénombrable. ◆

Proposition 1.7.3 Toute réunion d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles dénombrables et $A = \bigcup\limits_n A_n$. Il existe par hypothèse des bijections $\varphi_n : \mathbb{N} \longrightarrow A_n$. On construit une autre application $\psi :\ \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow A$ telle que $\psi(m,n) = \varphi_n(m)$. L'application ψ est surjective car $\forall a \in A$, il existe $\nu \in \mathbb{N}$, tel que $a \in A_\nu$. Posons $\mu = \varphi_\nu^{-1}(a)$. On a alors $\psi(\mu,\nu) = a$. ◆

Nous allons maintenant montrer l'existence d'ensembles non dénombrables en particulier l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Proposition 1.7.4 L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Preuve : Puisqu'on a une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ alors $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas un ensemble fini. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'application qui à $x \in \mathbb{N}$ associe l'ensemble $\varphi(x) = X = \{n \in \mathbb{N}/\varphi(n) \neq n\} \subset \mathbb{N}$. On va montrer que φ n'est pas surjective, auquel cas $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ne sera pas dénombrable. En effet, Supposons qu'il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(y) = X$:

- Si $y \in X$, par défintion, $y \notin \varphi(y) = X$; contradiction.
- Si $y \notin X$, alors $y \notin \varphi(y)$ et $y \in X$, contradiction.

L'application φ n'est pas surjective dans les deux cas. ◆

On admet le théorème suivant dont la démonstration sort du cadre du programme :

Théorème 1.7.5 L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. Plus précisément, tout intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

1.8 Exercices Corrigés

Dans la suite on considère E et F deux ensembles quelconques non vides et on désignera par $\complement_E A$ ou A^c le complémentaire de A dans E.

Exercice 1.7.1. ☞ Soient A et B deux sous-ensembles de E, on leur associe leur différence $A \backslash B$.

① Établir que $A\backslash B = A\backslash(A \cap B) = (A \cup B)\backslash B$. En déduire l'ensemble $A\backslash(A\backslash B)$.

② Soit C un troisième sous-ensemble de E. Montrer les formules suivantes :

$$\begin{aligned} A\backslash(B \cup C) &= (A\backslash B) \cap (A\backslash C). \\ A\backslash(B \cap C) &= (A\backslash B) \cup (A\backslash C). \\ (A\backslash B)\backslash C &= A\backslash(B \cup C). \end{aligned}$$

③ On définit une loi interne sur $\mathcal{P}(E)$ par $A * B = \complement_E A \cap \complement_E B$. Exprimer $\complement_E A$, $A \cup B$ et $A \cap B$ en fonction de la loi $*$.

Solution. On applique les lois de Morgan et les propriétés sur les complémentaires et la différence de deux ensembles.

① Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on a

$$\begin{aligned}
\complement_A(A\cap B) &= \{x/x \in A \text{ et } x \notin A\cap B\} = \{x/x\in A, x\notin B\} = A\backslash B.\\
(A\cup B)\backslash B &= \{x/(x\in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x\in B \text{ ou } x\notin B\} = A\backslash B.\\
A\backslash(A\backslash B) &= \complement_A\left(\complement_A(A\cap B)\right) = A\cap B
\end{aligned}$$

② En prenant les complémentaires de $B\cup C$ et $B\cap C$ dans E, on aura

$$\begin{aligned}
A\backslash(B\cup C) &= A\cap\complement_E(B\cup C) = A\cap(\complement_E B\cap C_E C) = (A\cap\complement_E B)\cap(A\cap\complement_E C)\\
&= (A\backslash B)\cap(A\backslash C).\\
A\backslash(B\cap C) &= A\cap(\complement_E B\cup\complement_E C) = (A\cap\complement_E B)\cup(A\cap\complement_E C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C).\\
(A\backslash B)\backslash C &= A\cap(\complement_E B\cap\complement_E C) = A\cap\complement_E(B\cup C) = A\backslash(B\cup C).
\end{aligned}$$

③ En choisissant $B = E$ (resp. $B = A$), on obtient $\complement_E A = A * E$ (resp. $C_E A = A * A$). En remplaçant A et B par leurs complémentaires, on obtient $A\cap B = \complement_E A * \complement_E B$. Enfin, la loi de Morgan implique que $A\cup B = \complement_E(A * B)$. ◆

Exercice 1.7.2. ☞ Soit $I_A : E \longrightarrow \{0,1\}$, la fonction caractéristique de $A \in \mathcal{P}(E)$, définie par

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Démontrer que pour A et $B \in \mathcal{P}(E)$:

① $I_A(x) = I_B(x) \Longleftrightarrow A = B$.

② $I_{\complement_E A}(x) = 1 - I_A(x)$.

③ $I_{A\cap B}(x) = I_A(x)I_B(x)$.

④ $I_{A\cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_A(x)I_B(x)$.

⑤ $I_{A-B} = I_A(1 - I_B)$.

⑥ $I_{A\Delta B} = I_A + I_B - 2I_A.I_B$.

Solution. Si $A \subset B$, alors $I_A(x) \leq I_B(x)$.

① $A = B \Longleftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A$ d'où $I_A = I_B$.

② On a $x \in A \Longleftrightarrow x \notin \complement_E A$, alors $I_A(x) = 1$ et $I_{\complement_E A}(x) = 0$. Si $x \notin A$ alors $x \in \complement_E A$. Dans les deux cas, on a

$$I_A(x) + I_{\complement_E A}(x) = 1.$$

③ Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc

$$I_A(x).I_B(x) = 1 = I_{A\cap B}.$$

On procède de la même façon dans le cas où $x \notin A \cap B$.

④ En utilisant les identités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} I_{A\cup B} &= 1 - I_{\complement_E A \cap \complement_E B} = 1 - I_{\complement_E A}.I_{\complement_E B} \\ &= 1 - (1 - I_A)(1 - I_B) = I_A + I_B - I_A.I_B. \end{aligned}$$

Comme $A \backslash B = A \cap \complement_E B$, on a

$$I_{A\backslash B} = I_{A\cap \complement_E B} = I_A.I_{\complement_E B} = I_A(1 - I_B).$$

Remarquons que $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$. Les relations précédentes nous donnent

$$I_{A\Delta B} = I_{A\cup B}.(1 - I_A.I_B) = I_A + I_B - 2I_AI_B. \blacklozenge$$

Exercice 1.7.3. ☞ Soient A et $B \in \mathcal{P}(E)$ et $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

① Montrer que f est injective si et seulemnt si $A \cup B = E$.

② Montrer que f est surjectif si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

③ Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.Donner f^{-1}.

Solution. Soit f une application définie comme dans l'énoncé.

① Comme f est injective et $f(A \cup B) = f(E) = (A, B)$, alors $A \cup B = E$. Inversement, si $A \cup B = E$ et $f(X) = f(Y)$ alors

$$X \cap A = Y \cap A \quad \text{et} \quad X \cap B = Y \cap B.$$

Donc

$$\begin{aligned} X &= X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) \\ &= (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap E = Y. \end{aligned}$$

② Supposons que f est surjective et fixons $(A, \emptyset) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Il existe alors $X \in \mathcal{P}(E)$, tel que $f(X) = (A, \emptyset)$. Donc

$$X \cap A = A \quad \text{et} \quad X \cap B = \emptyset$$

et

$$A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = \emptyset.$$

Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$ et soit $(X_1, Y_1) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. Posons $X = X_1 \cup Y_1 \in \mathcal{P}(E)$. Puisque

$$A \cap Y_1 \subset A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad B \cap X_1 \subset A \cap B = \emptyset$$

on aura

$$\begin{aligned} f(X) &= ((X_1 \cap A) \cup (Y_1 \cap A); (X_1 \cap B) \cup (Y_1 \cap B)) \\ &= (X_1 \cap A, Y_1 \cap A) = (X_1, Y_1). \end{aligned}$$

Donc f est surjective.

③ f est injective et surjective donc bijective. D'après 1) et 2), on a

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup B = E \implies B = C_E A.$$

La fonction f est définie dans ce cas par $f(X) = (U, V)$ avec

$$U = X \cap A, \quad V = X \cap A^c \quad \text{et} \quad X = U \cup V.$$

Sous ces conditions, la réciproque f^{-1} de f est définie par $f^{-1}(U, V) = U \cup V$. ◆

Exercice 1.7.4. ☞ Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

① Cette application est-elle injective? est-elle surjective ? est-elle bijective ?

② Montrer que la restriction ξ de f à $]-1/2, 1/2[$ est une bijection de $]-1/2, 1/2[$ sur $]-1,1[$.

③ Soit $\varphi : \mathbb{R} \to]-1,1[$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Montrer que φ est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \sin(\pi x)$.

① Comme $f(0) = f(1) = 0$, l'application f n'est pas injective. Par contre $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$ c-à-d. que f est surjective. De plus

$$f(\mathbb{Z}) = \{0\}, \quad f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{1\}) = \left\{ a \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{Z} \text{ et } a = \frac{1}{2} + 2k \right\}.$$

② La restriction ξ de f à l'intervalle $I =]-1/2, 1/2[$ est bijective car pour tout $y \in]-1,1[$, l'equation $\sin(\pi x) = b$ admet une solution unique $x \in I$.

③ Si $y = \varphi(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, la réciproque φ^{-1} de φ est telle que $x = \varphi^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$, qui est une application de $]-1,1[$ sur $\mathbb{R}$. ◆

Exercice 1.7.5. ☞ Une application f de E dans E est dite une **involution** lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

① Montrer que f est involutive si et seulement si elle est bijective et $f = f^{-1}$.

② Déterminer les applications affines et homographiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont involutives.

Solution. Soit l'application $f : E \to E$.

① Comme $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors pour tout $x \in E, x = f(f(x))$. L'élément x est l'image de $f(x)$, donc f est surjective. Supposons que $f(x) = f(y)$, en composant à gauche par f on trouve que $x = y$, donc f est injective, d'où f est bijective et $f = f^{-1}$. Inversement, toute bijection f telle que $f = f^{-1}$ est une involution.

② Soit $f(x) = ax + b, a \neq 0$, une bijection affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque est $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$. La condition pour que f soit une involution est $f = f^{-1}$ donc $a^2 = 1$ et $b(a+1) = 0$. Si $a = 1$, $b = 0$ alors $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Pour $a = -1$, b serait arbitraire et $f(x) = -x + b$.

③ La transformation homographique $f : x \to f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ admet pour inverse la transformation $x \to f^{-1}(x) = \dfrac{-dx+b}{cx+d}$. La condition d'involution exige que les cœfficients soient proportionnels. Donc $\dfrac{a}{-d} = \dfrac{b}{b} = \dfrac{c}{c} = \dfrac{d}{-a}$ et $a + d = 0$. ◆

Exercice 1.7.6. ☞ Déterminer sur $\mathbb{R}$ les classes d'équivalence et la décomposition des fonctions correspondantes des relations suivantes

$$x \,\mathcal{R}_1\, y \iff x + x^{-1} = y + y^{-1}, \qquad 0 \,\mathcal{R}_1\, 0$$
$$x \,\mathcal{R}_2\, y \iff x^4 - x^2 = y^4 - y^2, \qquad 0 \,\mathcal{R}_2\, 0.$$

Solution. Le fait que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont des relations d'équivalence est facile à prouver. La classe d'équivalence de $x \neq 0$ pour $\mathcal{R}_1$ est $\bar{x} = \{y \in \mathbb{R} / y + y^{-1} = x + x^{-1}\}$. Or,

$$(y - x)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) = 0 \iff y = x \text{ ou } y = x^{-1}.$$

Le graphe de $\mathcal{R}_1$ dans $\mathbb{R}^2$ est la réunion de la première bissectrice et de l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$. On vérifie de la même façon que le graphe de $\mathcal{R}_2$ est la réunion des droites $y = x$, $y = -x$ et le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$. ◆

Exercice 1.7.7. ☞ Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $a \neq b$ et $M(x,y)$, $M'(x',y')$ deux points du plan euclidien $\mathcal{P}$. Sur l'ensemble $\mathcal{P}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par

$$M\mathcal{R}M' \iff \exists \varphi \in \mathbb{R} \ \text{ tel que } \quad \begin{cases} x = x'\cos\varphi + \dfrac{a}{b}y'\sin\varphi \\ y = -\dfrac{b}{a}x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

① Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}$.

② Préciser les classes d'équivalence et l'ensemble quotient $P/\mathcal{R}$.

③ Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans P définie par

$$f : \varphi \longrightarrow M(x,y) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = \cos\varphi + \dfrac{a}{b}\sin\varphi \\ y = -\dfrac{b}{a}\sin\varphi + \cos\varphi \end{cases}$$

Déterminer la décomposition canonique de f.

Solution. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ tel que $a \neq b$.

① Si $M\mathcal{R}M'$, il suffit de choisir $\varphi' = -\varphi$ pour que $M'\mathcal{R}M$, d'où la reflexivité. Pour la transitivité, supposons que $M\mathcal{R}M'$ et $M'\mathcal{R}M''$ et φ et φ' les réels associés à M et M'. En choisissant $\varphi'' = \varphi + \varphi'$, il est facile de montrer que $M\mathcal{R}M''$.

② La classe de M est $\text{cl}(M) = \{M'(x',y') \in P : a^2x'^2 + b^2y'^2 = K^2\}$, c'est l'équation d'une ellipse. L'ensemble quotient $P/\mathcal{R}$ est donc l'ensemble des ellipses d'équations

$$a^2x^2 + b^2y^2 = k^2, \ k \in \mathbb{R}.$$

③ Il est immédiat que la relation $f(\varphi) = f(\varphi')$ entre éléments de $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$. Plus précisément, on vérifiera que cette relation est la relation de congruence modulo 2π

$$\varphi\mathcal{R}\varphi' \iff \varphi \equiv \varphi' \ [\text{mod } 2\pi].$$

L'application f peut-être alors factorisée en trois applications, à savoir

$$\mathbb{R} \xrightarrow{s} \mathbb{R}/\mathcal{R} \xrightarrow{h} f(\mathbb{R}) \xrightarrow{i} P$$

telles que

$$s(\varphi) = \varphi \ \ [\text{mod} 2\pi], \quad h(s(\varphi)) = f(\varphi) \ \text{ et } \ i \text{ l'injection.}$$

L'ensemble $f(\mathbb{R})$ est l'ellipse d'équation $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2 + b^2$. ◆

Exercice 1.7.8. ☞ Sur l'ensemble $\mathbb{R}$ on considère la loi suivante $x * y = x + y - xy$.

① Etudier les propriétés de la loi $*$ (commutativité, associativité, etc...).

② Evaluer en fonction de $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ la puissance $\underbrace{x * x \cdots * x}_{n \text{ fois}}$.

Solution. La loi $*$ est une loi interne, associative, commutative et d'élément neutre $x = 0$. Le symétrique de x pour cette loi est $x' = x/(1-x)$ pour $x \neq 1$. Remarquons que

$$x * y = 1 - (1-x)(1-y).$$

Par récurrence sur n, on obtient le produit de n facteurs égaux à x

$$x * x \cdots * x = 1 - (1-x)^n. \quad ◆$$

Exercice 1.7.9. ☞ Etudier les propriétés de la loi $*$ définie sur l'intervalle $]-1,1[$ de $\mathbb{R}$ par

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy}, \quad \forall\ (x,y) \in \ ]-1,1[^2.$$

Etudier les propriétés de cette loi.

Solution. La loi $*$ est associative, commutative et admet 0 pour élément neutre et tout réel x admet $-x$ comme symétrique. Reste à vérifier que $*$ est une loi interne c'est à dire

$$\forall (x,y) \in]-1,1[^2 \implies x * y \in]-1,1[.$$

En effet, $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ implique $|xy| \leq 1$. Par conséquent $1 + xy > 0$ et on a l'équivalence

$$\frac{x+y}{1+xy} < 1 \iff (1-x)(1-y) > 0.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour tout x et y de l'intervalle $]-1,1[$. Même vérification si $\dfrac{x+y}{1+xy} > -1$. ◆

Exercice 1.7.10. ☞ Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

① Soit n un entier fixé. Montrer qu'il existe un couple unique d'entiers (a,b) vérifiant

$$b = n - \frac{a(a+1)}{2} \quad \text{et} \quad b \leq a.$$

② Montrer que l'application

$$(a,b) \to \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$$

est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$.

Solution. Si $\dfrac{a(a+1)}{2} + b = n$ alors $a(a+1) \leq 2n$.

① On a

$$(a+1)(a+2) = a(a+1) + 2(a+1) \geq a(a+1) + 2(b+1) > 2n.$$

Donc a est le plus grand entier vérifiant $a(a+1) \leq 2n$. L'unicité de b et donc celle du couple (a,b) résulte de la formule $b = n - \dfrac{a(a+1)}{2}$. Il reste à montrer l'existence de a et b. L'ensemble des entiers m tels que $m(m+1) \leq 2n$ n'est pas vide car il contient 0 et est majoré par n. Il a donc un plus grand élément a. Alors $b = n - \dfrac{a(a+1)}{2}$ est un entier strictement positif et $b \leq a$, car sinon on aurait

$$n - \frac{a(a+1)}{2} < 0,$$

soit que $2n < (a+1)(a+2)$, contradiction.

② Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient a et b comme dans la première question, alors $(a-b, b)$ a pour image n. Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) ont la même image alors $y_1 = y_2$ et $x_1+y_1 = x_2+y_2$ et les deux couples sont égaux. ◆

1.9 Problèmes Corrigés

Les résultats des problèmes qui suivent peuvent être considérés comme un prolongment et une suite logique du cours. Leurs compréhension est, de ce fait, indispensable.

Énoncé 1 :

On définit la fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ par

$$f(n) = \begin{cases} 2n-1 & \text{si } n \geq 1 \\ -2n & \text{si } n \leq -1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

① Montrer que f est injective.

② Montrer que f est surjective.

③ En déduire que l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Solution

① Soient m et $n \in \mathbb{Z}$ tels que $f(m) = f(n)$. On remarque que si $p \leq 1$ alors $f(p)$ est impair et que si $p \leq 0$ alors $f(p)$ est paire. Dans le premier cas, $f(n) = 2n-1$ et $(fm) = 2m-1$, ce qui donne $m = n$. Dans le second cas, $f(n) = -2n = f(m) = -2m$ et alors $m = n$. Ainsi, f est injective.

② Soit $m \in \mathbb{N}$. Si m est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k$, et on a $m = f(-k)$ puisque $-k \leq 0$. Si m est impair, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = 2k - 1$, et on a $m = f(k)$. La fonction f est donc surjective.

③ La fonction f étant une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{N}$. Donc $\mathbb{Z}$ est dénombrable. ◆

Énoncé 2 :

On pose $E = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \{0,1\})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$. On note par χ_A la fonction caractéristique de $A \subset \mathbb{N}$. On définit, enfin, une fonction ϕ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans E donnée par $\phi(A) = \chi_A$ pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

① Montrer que ϕ est injective.
② Soit $f \in E$. Déterminer A tel que $f = \chi_A$. En déduire de ϕ est surjective.
③ Soient $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $C = \{x \in \mathbb{N}; x \notin h(x)\}$, montrer que h n'est pas surjective.
④ Déduire de ce qui précède que E n'est pas dénombrable.

Solution

① Soient A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telles que $\phi(A) = \phi(B)$ donc $\chi_A = \chi_B$ ce qui assure que $A = B$ et ϕ est injective.

② Soit $f \in E$.Posons $A = f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathbb{N} : f(x) = 1\}$. Alors$f = \chi_A$. En effet, si $x \in A$ alors $f(x) = 1$ et si $x \notin A$, alors $f(x) \neq 1$ donc $f(x) = 0$ et ces propriétés ne sont vérifiées que si $f = \chi_A$. On vient de montrer que, pour tout $f \in E$, il existe $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ telque $f = \chi_A = \phi(A)$ ce qui signifie que ϕ est surjective.

③ Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{N}$ trel que $h(x) = C$. Alors si $x \in C$ alors $x \notin h(x)$ c-à-d $x \notin C$, ce qui est impossible. si $x \notin C$ alors $x \in h(x) = C$ c-à-d $x \notin C$, ce qui est impossible aussi. Il n'existe ainsi pas de $x \in \mathbb{N}$ tel que $h(x) = C$ et alors h n'est pas surjective.

④ Supposons que E est dénombrable. Il existe une bijection $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\varphi \circ \psi$ serait une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{N}$. Mais, d'après la question précédente, une telle bijection n'existe pas. L'ensemble E n'est donc pas dénombrable.

Énoncé 3 :

On désigne par $E(x)$ la partie entière du nombre x. Le nombre a étant un irrationnel donné, on définit une application $f : \mathbb{Z} \to [0,1]$ définie par $f(q) = aq - E(aq)$.

① Montrer que f est injective.

② Montrer que si $y_1, y_2 \in f(\mathbb{Z})$ alors $|y_2 - y_1| \in \mathbb{Z}$.

③ Prouver que, $\forall \varepsilon > 0$, l'intrevalle $[0, \varepsilon]$ contient au moins un élément de $f(\mathbb{Z})$ et donc une infinité.

④ Déduire du résultat précédent qu'on peut trouver une infinité de rationnels $\dfrac{p}{q}$ qui vérifient les inégalités.

$$\left|a - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{\varepsilon}{q} \quad \text{où} \quad q > 0.$$

Solution

$E(x)$ désigne la partie entière du nombre irrationnel x.

① Supposons que $f(q) = f(q')$ ou encore $E(aq') - E(aq) = a(q - q')$, soit un nombre entier. Ceci est impossible sauf si $q - q' = 0$ (sinon a serait un rationnel).

② Supposons que $y_1 < y_2$. Ecrivons que y_1 et y_2 sont des éléments de $f(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} \exists q_1 \in \mathbb{Z} : y_1 &= f(q_1) = aq_1 - E(aq_1) \\ \exists q_2 \in \mathbb{Z} : y_2 &= f(q_2) = aq_2 - E(aq_2). \end{aligned}$$

Donc

$$0 \leq y_2 - y_1 = a(q_2 - q_1) - (E(aq_2) - E(aq_1)) \leq 1.$$

L'entier $E(aq_2) - E(aq_1)$ est alors le plus grand entier inférieur à $a(q_2 - q_1)$. Donc

$$y_2 - y_1 = a(q_2 - q_1) - (E(aq_2) - E(aq_1)) = f(q_2 - q_1).$$

③ D'après le résultat précédent, si l'intervalle $[0, \varepsilon]$ ne contient pas d'élément de $f(\mathbb{Z})$ alors $f(\mathbb{Z}) > \varepsilon$; donc $f(\mathbb{Z})$ contenu dans $[\varepsilon, 1]$ n'aurait alors qu'un nombre fini d'éléments, ce qui est impossible puisque $\mathbb{Z}$ est infini et f injective.

④ Remarquons que $f(q) \neq 0$ puisque a est irrationnel et que $[0, \varepsilon]$ contient au moins un élément y_1 de $f(\mathbb{Z})$. Supposons que nous en connaissions déjà au moins n éléments; notés $y_1, \cdots, y_n$. Soit ε_n un réel tel que $0 < \varepsilon_n < \min(y_1, \cdots, y_n)$, alors l'intervalle $[0, \varepsilon_n]$ contient un point y_{n+1} de $f(\mathbb{Z})$ (différent bien sûr de $y_1, \cdots, y_n$). On construit ainsi une suite infinie d'éléments de $f(\mathbb{Z})$ dans $[0, \varepsilon]$. Désignons par q un entier tel que $f(q) \in [0, \varepsilon]$ et par p l'entier $E(aq)$

$$0 < aq - p \leq \varepsilon \Longrightarrow \left| a - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|q|}.$$

En remplaçant si nécessaire p et q par $-p$ et $-q$, on obtient le résultat demandé. ◆

Chapitre 2

Fonctions et suites numériques réelles

2.1 Fonctions numériques

Sauf mention du contraire, le corps $\mathbb{K}$ désignera le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

On appelle **fonction numérique** sur un ensemble E tout procédé qui, à tout élément x de E, permet d'associer au plus un élément de l'ensemble $\mathbb{R}$, appelé alors image de x et noté $f(x)$. Les éléments de E qui ont une image par f forment l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$.

☞ **Exemple 2.1.1** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 \geq 0$. Donc $x \in]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[= \mathcal{D}_f$. L'image du réel 4 par f est $\sqrt{15}$, on dit que 4 est un antécédent de $\sqrt{15}$. ◆

Si f est définie sur $E = \mathbb{R}$ ou sur un intervalle $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$, l'application f est dite fonction numérique à variable réelle. On notera par $\mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ l'ensembles des fonctions numériques à variable réelle définies sur un intervalle $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On notera cette fonction par $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ ou $x \mapsto f(x)$. On prendra soin de ne pas confondre la fonction désignée par f et l'image par f de x qui est désignée par $f(x)$.

Soient f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit de nouvelles applications, appartenant à $\mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$, par : $f+g : x \mapsto f(x)+g(x)$, $\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$ et $fg : x \mapsto f(x)g(x)$. Ses opérations mènent l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ d'une structure d'algèbre commutative sur $\mathbb{R}$.

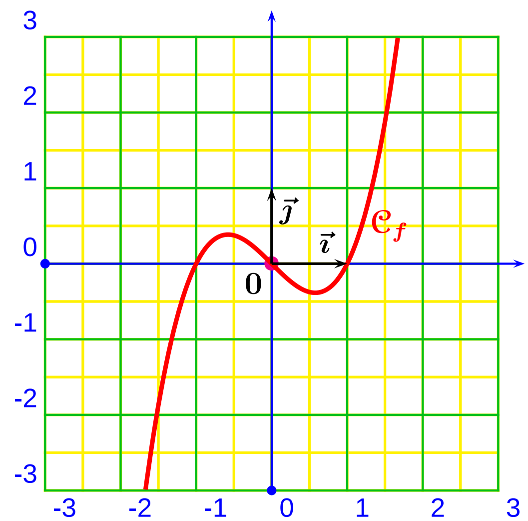
On appelle **graphe**, ou **courbe représentative**, d'une fonction f définie sur un intervalle $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\boxed{\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}}$$

formé des points $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$ du plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Par souci de simplification, les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne seront pas mentionnés dans les graphes suivants lorsque le plan est muni d'un repère orthonormé.

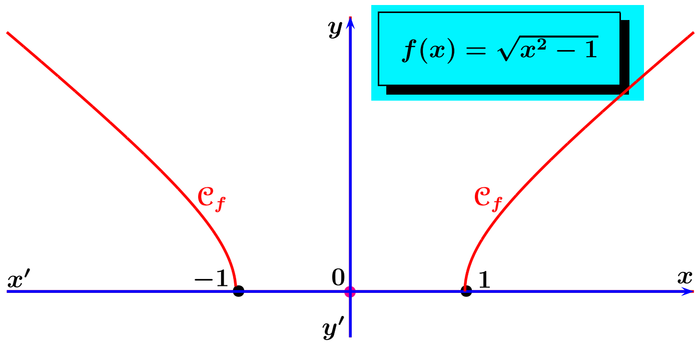
☞ **Exemple 2.1.2** Le graphe $\mathcal{C}_f$ de la fonction $f(x) = x^3 - x$ prend l'allure ci-contre sur l'intervalle $[-3, 3]$. En fait, son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et on remarque, de plus, que la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère orthonormé. ◆



On peut, parfois, restreindre l'étude d'une fonction sur un sous intervalle de son domaine de définition. Supposons que f admet pour domaine de définition $\mathcal{D}_f$ un intervalle centré en l'origine 0 d'un repère orthonomé du plan.

Définition. *L'application f est **paire** si,* $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = f(x)$.

☞ **Exemple 2.1.3** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est paire. Son domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.



Il suffit de l'étudier et de tracer sa courbe sur $[1, +\infty[$ et compléter, ensuite, cette courbe sur $]-\infty, -1]$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées. ◆

Définition. *L'application f est* **impaire** *si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:* $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

Lorsque la fonction f est impaire, sa courbe représentative admet l'origine 0 comme **centre de symétrie**. Dans ce cas, On restreint l'étude de la fonction f sur

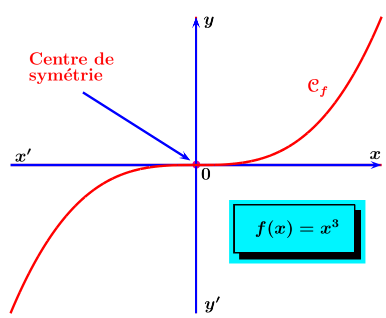
$$\mathcal{D}_f^+ = \{x \in \mathcal{D}_f \ : \ x \geq 0\}.$$

On complète, ensuite, le reste de la courbe sur

$$\mathcal{D}_f^- = \{x \in \mathcal{D}_f \ : \ x \leq 0\}$$

par symétrie par rapport à l'origine 0.

☞ **Exemple 2.1.4** La fonction $f : x \mapsto x^3$ est une fonction impaire. Son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Il suffit de l'étudier, de tracer sa courbe représentative sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et la compléter, ensuite, la courbe sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ par symétrie par rapport à 0. ◆



Fonction impaire

Définition. *Une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite* **périodique** *s'il existe* $T > 0$ *tel que*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+T) = f(x).}$$

Ainsi, si T est une période pour f, tous les nombres de la forme kT, $k \in \mathbb{Z}$, sont aussi des périodes pour f. En fait, il existe une plus petite periode que toutes les autres; c'est ce que l'on appelle généralement la **période** de f.

Définition. *La fonction* $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ *est dite* **croissante** *sur l'intervalle* $\mathbb{I}$ *si pour tous* $x_1, x_2 \in [a, b]$, *on a*

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) \\ \textbf{ou} \\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2). \end{array}}$$

La fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ *est dite* **décroissante** *sur l'intervalle* $\mathbb{I}$ *si pour tous* $x_1, x_2 \in [a, b]$, *on a*

$$\boxed{\begin{array}{c} x_1 \geq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \\ \textbf{ou} \\ x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2). \end{array}}$$

La fonction f est dite **monotone** sur l'intervalle $\mathbb{I}$ si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle. Lorsque les inégalités sont strictes on parle de fonctions **strictement** croissante (resp. décroissante). Remarquons au passage que toute fonction strictement monotone est injective. On montre facilement les propriétés suivantes :

① Si f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ sont croissantes alors $f + g$ est croissante. En plus, si l'une d'elles est strictement croissante alors $f + g$ est strictement croissante.

② Si f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})^+$ et si elles sont croissantes (resp. décroissantes) alors fg est croissante (resp. décroissante).

③ Si f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ sont croissantes (resp. décroissantes) alors $f \circ g$ est croissante (resp. décroissante).

④ Si f est croissante (resp. décroissante) et g est décroissantes (resp. croissante) alors $f \circ g$ est décroissante .

☞ **Exemple 2.1.5** La fonction $h(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ car elle s'écrit comme la composée deux fonctions $h = g \circ f$, l'une f croissante sur $\mathbb{R}$: $f(x) = x^2 + 1$ et l'autre g décroissante sur $\mathbb{R}^+$: $g(x) = \dfrac{1}{x}$. ◆

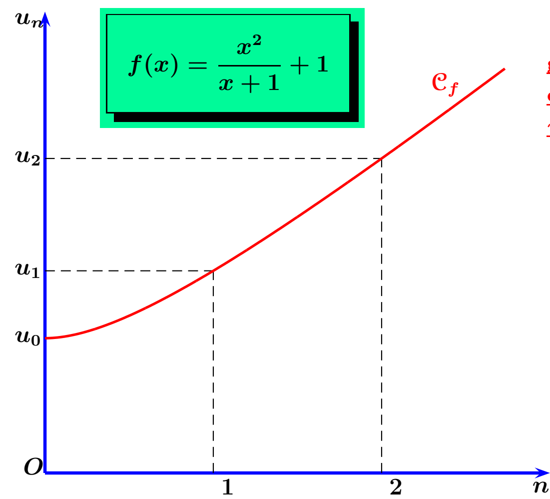
2.2 Suites numériques réelles

Après quelques généralités sur les suites, on étudie la notion de suite convergente. Comme exemple de suites convergentes, on étudie les suites monotones, adjacentes. On présente ensuite les suites tendant vers l'infini, cas particulier des suites divergentes non bornées. Enfin, on étudiera les suites récurrentes linéaires et on présentera des méthodes succinte pour les résoudre.

Définition. *Une* **suite réelle***, ou tout simplement suite, est une fonction $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui à $n \in \mathbb{N}$ associe $u_n \in \mathbb{R}$. On note une telle suite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n). Le terme u_n est dit terme général.*

Intuitivement, une suite est une collection finie ou infinie de nombres réels, donnés dans un certain Ordre. Elle peut être définie explicitement par une formule ou implicitement par récurrence. D'autre part, on peut la représenter graphiquement :

☞ **Exemple 2.2.1** Considérons la suite (u_n) dont le terme général est défini par $u_n = f(n)$ où la fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} + 1$:



graphe d'une suite $u_n = f(n)$

① On trace la courbe de f sur $[0, +\infty[$;

② On place u_0 sur l'axe des ordonnées;

③ On place $u_1 = f(1)$ image de 1 par f;

④ On place $u_2 = f(2)$ image de 2 par f;

⑤ On réitère la méthode de construction pour placer les autres termes sur l'axe des ordonnées. ◆

☞ **Exemple 2.2.2** $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $u_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est une suite dont tous les termes d'indice paire sont égaux à 1 et les termes d'indice impair sont tous égaux à -1. ◆

Suites arithmétiques

☞ **Exemple 2.2.3** Elle est définie par la récurrence suivante

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

où $r \in \mathbb{R}$ est la raison de la suite. Par récurrence, on montre que

$$\boxed{u_n = u_0 + nr.}$$

En effet, on a $u_1 = u_0 + r$, $u_2 = u_1 + r, \cdots, u_n = u_{n-1} + r$. En ajoutant, ces expressions et en éliminant les termes égaux des deux membres, on obtient le terme générale u_n en fonction du terme initial u_0 et r. D'autre part, on définie la suite $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des suites partielles dont le terme général est défini par $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Calculons en les premiers termes :

$$\begin{aligned} s_0 &= u_0 \\ s_1 &= u_0 + u_1 = 2u_0 + r \end{aligned}$$

$$s_2 = u_0 + u_1 + u_2 = 3u_0 + 2r$$

Quant au terme général, il s'écrit

$$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + (1 + 2 + \cdots + n)$$

Par récurrence, on montre que

$$\boxed{\mathbf{1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.}}$$

D'où

$$\boxed{\boldsymbol{s_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.} \quad \blacklozenge}$$

☞ **Exemple 2.2.4** Elle est définie par Suites géométriques

$$\boxed{\boldsymbol{u_{n+1} = qu_n}}$$

où $q \in \mathbb{R}$ est la raison de la suite. Mais, $u_1 = qu_0$, $u_2 = qu_1$, $\cdots$, $u_n = qu_{n-1}$. Puisque les termes de la suite sont non nuls, on peut mulitplier ces expressions terme à terme et en divisant, on obtient l'expression de u_n en fonction de q, u_0 et n :

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = q^n u_0.}}$$

Pour la somme s_n, calculons en les premiers termes : $s_0 = u_0$, $s_1 = u_0 + u_1 = u_0(1+q)$ et par récurrence, on obtient

$$\boxed{\boldsymbol{s_n = u_0(1 + q + q^2 + \cdots + q^n) = u_0.\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.} \quad \blacklozenge}$$

✧ **Suites récurrentes :** On peut, aussi définir une suite par une relation de récurrence. En fait, on donne les premiers termes de la suite et on exprime le terme général u_n en fonction des termes qui le précèdent. Soient f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, la suite u_n sera définie par récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On peut également Suites récurrentes la définir, en se donnant les deux termes initiaux u_0 et u_1 et la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n, u_{n-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ où g est, dans ce cas, une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, les suites récurrentes linéaires d'ordre 2) sont définies par

$$\boxed{u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}, \ a, b \in \mathbb{R}}$$

avec u_0 et u_1 donnés. Par analogie avec les équations différentielles et par unicité de la solution, on cherche celle-ci sous forme de suite géométrique. On se ramène ainsi à résoudre une équation de second degré dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Une application classique est fournie par la **suite de Fibonacci**.

Suite de Fibonacci

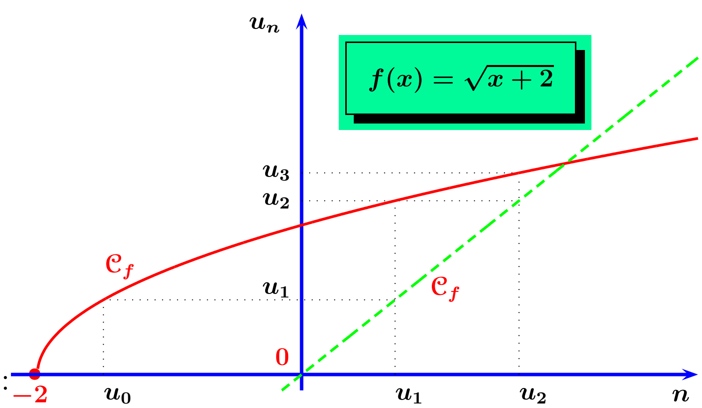
☞ **Exemple 2.2.5** $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On obtient

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Le nombre $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est dit **nombre d'or**.

graphe d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

☞ **Exemple 2.2.6** Soit la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1,5$ et définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. On peut écrire $u_{n+1} = f(u_n)$ où la fonction f est donnée par $f(x) = \sqrt{x+2}$. On procède de la manière suivante :



① On trace la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f sur $[-2, +\infty[$ et la droite $\mathcal{D}_f$ d'équation $y = x$;

② On place u_0 sur l'axe des abscisses;

③ On place $u_1 = f(u_0)$ image de u_0 par f;

④ Comme $u_2 = f(u_1)$,on utilise la bissectrice pour placer u_1 sur l'axe des abscises.

⑤ On réitère la méthode de construction pour placer les autres termes sur l'axe des ordonnées. ◆

Définition. *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est*

- **Croissante** *(resp.* **strictement croissante***) si $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$).*
- **Décroissante** *(resp.* **strictement décroissante***) si $u_{n+1} \leq u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).*
- **Monotone** *si elle est croissante ou décroissante.*

✧ **Démarche pratique :** Pour déterminer le sens de variation d'une suite (u_n), on procède suivant les cas de la manière suivante :

Sens de variations d'une suite

- ◆ Déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- ◆ Si les termes de la suite sont strictement poistifs, on compare la quantité $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.
- ◆ Si la suite est arithmétique, le sens de variation est déterminé par le signe de la raison $r = u_{n+1} - u_n$.
- ◆ Si la suite est géométrique, le sens de variation est déterminé par la comparaison de $q = u_{n+1}/u_n$ est 1.
- ◆ Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, le sens de variation de la suite est déterminé par celui de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
- ◆ Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, le sens de variation de la suite est déterminé par celui de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$ tout en utilisant une récurrence.

☞ **Exemple 2.2.7** Comme la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x + 1$ est croissante sur $[0; +\infty[$, la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2 + n + 1$ est croissante. ◆

☞ **Exemple 2.2.8** Considérons la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$. C'est une suite de termes positifs définie sur $\mathbb{N}^*$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} < 1$ la suite est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$. On peut, d'autre part, trouver la même résultat en calculant la différence $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{n(n+1)} < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$. Mais $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est une fonction strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc la suite (u_n) admet le même sens de variations sur $\mathbb{N}^*$. ◆

☞ **Exemple 2.2.9** Considérons la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$. C'est une suite de termes positifs définie sur $\mathbb{N}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{(n+1)(n+2)} > 0$, donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est strictement croissante. ◆

☞ **Exemple 2.2.10** Une suite arithmétique est strictement croissante (resp.décroissante) si sa raison $r > 0$ (resp. $r < 0$). ◆

☞ **Exemple 2.2.11** La suite de terme général $v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$. Elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$, car $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{2}{3} = q < 1$. ◆

Définition. *Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est*

- **Majorée** *s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq M$.*
- **Minorée** *s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq m$.*
- **Bornée** *s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq u_n \leq M$ c'est-à-dire si la suite et minorée et majorée.*

☞ **Exemple 2.2.12** La suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est une suite bornée. Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n < 1$. De plus elles est strictement décroissante, car $(n+1)+1 > n+1$ et en passant à l'inverse on a $u_{n+1} < u_n$. ◆

☞ **Exemple 2.2.13** La suite $u_n = \sin n$ est une suite majorée par le réel 1. ◆

☞ **Exemple 2.2.14** La suite $v_n = a^n v_0$ est une suite croissante non majorée si $a > 1$. Elle est décroissante et bornée si $a < 1$. Elle est constante si $a = 1$. ◆

Par ailleurs, on vérifie que :

- La somme de deux suites croissantes (resp. décroissantes) est encore croissantes (resp. décroissantes).
- Le produit d'une suite croissante (resp. décroissante) par un réel positif est croissante (resp. décroissante)(resp. décroissantes).
- Le produit d'une suite croissante (resp. décroissante) par un réel négatif est décroissante (resp. croissante).

2.3 Suites convergente et divergente

Le comportement du terme générale u_n lorsque n tend vers l'infini est un problème fondamentale qui se pose à chaque étude d'une suite numérique. En fait, on veut formaliserl'idée intuitive que les termes d'une suite s'approchent de plus en plus d'une certaine valeur qui s'appelle la limite de la suite. Lorsque le terme général s'approche, à l'infini, vers un nombre fini a, on dit que la suite **converge** vers a et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$. Lorsque cette limite est infini on dit que la suite **diverge**. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. Mais, il y a des cas , par exemple $u_n = (-1)^n$, où cela se passe beaucoup moins bien et on est incapable de conclure.

Définition. *La suite (u_n)* **converge** *vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Ceci est résumé dans la forme compacte suivante :*

$$\boxed{\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.}$$

Une suite numérique ne peut converger qu'au plus vers une seule limite. Cette unicité est assurée par :

Théorème 2.3.1 Si la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est unique.

Preuve : Supposons que cette suite converge vers ℓ_1 et ℓ_2. Pour un $\varepsilon > 0$, il existe par définition n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$n > n_1 \Longleftarrow |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad n > n_2 \Longleftarrow |u_n - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En tenant compte de l'inégalité $|a+b| \leq |a| + |b|$, alors

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n - \ell_2 + u_n| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2|$$

Posons $n_3 = \sup(n_1, n_2)$. Alors, pour $n > n_3$, on obtient

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - u_n - \ell_2 + u_n| \leq |u_n - \ell_1| + |u_n - \ell_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque, il peut être choisi aussi petit que l'on veut, à savoir voisin de 0. Donc $\ell_1 = \ell_2$. ◆

Soient $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent vers ℓ et ℓ'. Alors

1. la suite somme $\{u_n + v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$.

2. la suite produit $\{u_n v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell.\ell'$

3. Si $\ell \neq 0$, alors à partir d'un certain rang les ternes u_n de la suite sont non nuls et la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$.

Théorème 2.3.2 Toute suite réelle (u_n) qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ est bornée.

Preuve : Supposons, tout d'abord, que la suite (u_n) converge vers 0. Par définition, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N : |u_n| \leq \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq 1$. Posons $k = \{|u_0|, |u_1|, \cdots, |u_{N-1}|\}$, alors pour tout $n \geq N$ on a $|u_n| \leq k$, donc la suite (u_n) est bornée. Dans le cas général, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \ell$, posons $v_n = u_n - \ell$. la suite (v_n) converge vers 0, d'après la cas précédent elle est bornée, donc il existe m et M tels que $m \leq v_n \leq M$ soit que $\ell + m \leq u_n \leq \ell + M$, ce qui montre que la suite (u_n) est bornée. ◆

☞ **Exemple 2.3.1** La suite $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est convergente vers 0 donc elle est bornée et l'on a bien $0 < u_n \leq 1$. Mais, la réciproque est fausse. Pour le voir, considérons la suite $u_n = (-1)^n$ qui est bornée car $u_n = +1$ ou $u_n = -1$ suivant la parité de n, mais elle n'est pas convergente. ◆

Théorème des gendarmes

Proposition 2.3.3 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n \leq u_n \leq w_n.$$

Si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers ℓ alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

Preuve : On applique la définition de la limite vers ℓ pour les deux suites (v_n) et (w_n) pour un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ donné :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n', n'' \in \mathbb{N} : |v_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |w_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ce qui donne, en choisissant $n \geq n' + n''$, $\ell - \varepsilon \leq v_n \leq u_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$, ce qui démontre la convregence de la suite (u_n). ◆

Ce théorème est très utile pour démontrer la convergence d'une suite :

☞ **Exemple 2.3.2** Considérons la suite de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$. Pour $n > 0$, on a

$$v_n = -\frac{1}{n} \leq u_n = \frac{\sin(n)}{n} \leq w_n = \frac{1}{n}$$

Comme les suites de termes générals v_n et w_n tendent vers 0 lorsque n tend vers l'infini, le théorème précédent entraine la convergence de la suite $\left(\dfrac{\sin(n)}{n}\right)$ vers 0. ◆

Corollaire 2.3.1 Considéons deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \leq v_n$ alors à partir d'un certain rang :

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

On ne peut pas appliquer les théorèmes précédents pour calculer certaines limites. Mais, on pour y arriver, par l'application de certaines astuces.

☞ **Exemple 2.3.3** Considérons la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2-3}{n^2+1}$. On divise le numérateur et le dénominateur par n^2 et on passe ensuite à l'infini. Ainsi,

$$\frac{n^2-3}{n^2+1} = \frac{1-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$$

comme $1/n^2$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. ◆

Soit (u_n) une suite définie par la formule explicite $u_n = f(n)$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ avec ℓ réel ou infini, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Soit (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 et la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ alors ℓ est un point fixe pour f et $f(\ell) = \ell$.

☞ **Exemple 2.3.4** Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$. Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors il doit vérifié l'égalité $\ell = 2\ell+5$. Donc, si (u_n) converge, elle doit converger vers $\ell = -5$. Pour cela, posons $v_n = u_n + 5$. La suite (v_n) vérifié $v_{n+1} = 2v_n$, c'est une suite géométrique de raison 2 donc diverge. La suite (u_n) n'admet pas pour limite-5, donc elle diverge. ◆

☞ **Exemple 2.3.5** Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1}^2 + u_n + 1 = 0$. Si la suite (u_n) converge vers ℓ alors il doit vérifié l'égalité $\ell^2 + \ell + 1 = 0$. Cette équation n'admet pas de racine réelle donc elle ne converge pas. ◆

Une extension de la notion de limite d'une suite est donnée par la définition suivante :

Définition. *On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **tend vers $+\infty$** *si :*

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n > N, \quad \text{on a} \quad u_n \geq k.}$$

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge si elle ne converge pas, c'est-à-dire si elle n'admet pas de limite dans $\mathbb{R}$.

☞ **Exemple 2.3.6** Considérons la suite de terme générale $u_n = n^2$. Cette suite tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini. Dans la définition précédente, il suffit de prendre, pour tout $k \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$ égale à la partie entière du réel k. ◆

Proposition 2.3.4 Soit (u_n) une suite réelle de termes strictement positifs

① Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers 0.

② Si la suite (u_n) tend vers 0, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

Preuve : Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier N tel que $n \geq N$ alors $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Donc $0 < \frac{1}{u_n} < \varepsilon$ ce qui montre que $\frac{1}{u_n}$ tend vers 0. On procède de la même façon dans le second cas. ◆

✧ **Remarque :** La condition de la positivité est essentielle. Pour le voir, considérons la suite de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Elle converge vers $+\infty$ et pourtant $\frac{1}{u_n} = (-1)^n$ ne converge pas vers 0. ◆

Le théorème des gendarmes s'étend de la manière suivante :

Proposition 2.3.5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

① $v_n \geq u_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

② $v_n \leq u_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

Théorème 2.3.6 Toute suite décroissante minorée est convergente. Toute suite croissante majorée est convergente.

Preuve : Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minoréé et décroissante. Posons

$$\ell = \inf\{u_0, u_1, \cdots, \cdots\}.$$

Montrons que $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Pour un $\varepsilon > 0$ on a $u_n > \ell - \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par définition de ℓ, il existe un indice n_ε tel que $u_{n_\varepsilon} < \ell + \varepsilon$ pour tout $n > n_\varepsilon$. Ainsi, on vient de montrer que pour tout $n > n_\varepsilon$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Le deuxième cas se traîte de la même manière. ◆

On vient de montrer que :

1. Une suite décroissante, il n'y a que deux possibilités : elle converge ou diverge vers $-\infty$.

2. Une suite croissante, il n'y a que deux possibilités : elle converge ou diverge vers $+\infty$.

☞ **Exemple 2.3.7** Soit $x_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$. La suite (x_n) est évidemment croissante. On prouve par récurrence que $(n+1)! > 2^n$ pour $n \geq 1$. Donc la suite est majorée par :

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 2\left[1 - \frac{1}{2^n}\right] < 3.$$

Étant croissante majorée, elle converge. ◆

Lemme 2.3.7 On a

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } q > 1. \end{cases}$$

Pour les valeurs $q \leq -1$, la suite $\{q^n\}$ est divergente.

Preuve : Les cas $q = 1$ et $q = 0$ sont triviaux. Si $0 < q < 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, car $0 < \cdots < q^3 < q^2 < q < 1$. Donc elle converge. Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} q^n$ et vérifie $0 < \ell < 1$. Or,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} q^n = q \lim_{n\to+\infty} q^{n-1} = q\ell.$$

Donc $(q-1)\ell = 0$ et à fortiori on a $\ell = 0$. Si $q > 1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et non majoré, car $q^n = [1 + (q-1)]^n \geq 1 + n(q-1)$. D'après cette inégalité et puisque $q > 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$. Si $q < 0$, on écrit

$$|q|^n = (-q)^n = (-1)^n q^n.$$

Deux cas se présentent :
- si $q > -1$ alors $|q|^n$ tend vers 0
- si $q < -1$ alors $|q|^n$ tend vers $\pm$ suivant la parité de n. ◆

Puisque le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 s'écrit $u_n = q^n u_0$, on en déduit du lemme précédent :

Proposition 2.3.8 Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors

① Si $0 < q < 1$, la suite converge vers 0.

② Si $q = 1$, la suite est constante et égale à u_0.

③ Si $q > 1$, la suite diverge.

Définition. *On dit que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes si :*

- (u_n) *est croissante;* • (v_n) *est décroissante;* • $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Lemme 2.3.9 Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, si (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors $u_n \leqslant v_p$ pour tous entiers n et p.

Preuve : Supposons qu'il existe deux entiers N et P tels que $u_N > v_P$. D'après la monotonie des suites, on a $v_n < v_P < u_N < u_n$ pour tout entier $n > \max(N, P)$. Donc pour tout entier $n > \max(N, P)$, on a $0 < u_N - v_P < u_n - v_P < u_n - v_n$. Par passage à la limite, on a alors $0 < \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$. Contradiction. ◆

Théorème 2.3.10 *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*

Corollaire 2.3.2 *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, de limite commune ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.*

2.4 Suites et ensemble des nombres réels

On montrera dans ce qui suit, que tout nombre réel est limites d'une suite de nombres rationnels.

Théorème 2.4.1 *Soient a et b deux réels tels que$a < b$. Il existe un nombre rationnel r tel que $a < r < b$.*

Preuve : Comme la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0, il existe n_0 tel que $\frac{1}{n_0} < b - a$. Nous allons montrer qu'il existe un entier p tel que $a < \frac{p}{n_0} < b$. Supposons, tout d'abord, que $b \geq 0$. D'après la propriété d'Archimède, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $b \leq \frac{k}{n_0}$. Considérons ℓ le plus petit entiers des $k \geq 1$. On a alors$\frac{\ell - 1}{n_0} < b \leq \frac{\ell}{n_0}$. Ce qui donne

$$a < \frac{\ell - 1}{n_0} < b. \quad \blacklozenge$$

Théorème 2.4.2 *Tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.*

Preuve : Soit $a \in \mathbb{R}$. Appliquons la théorème précédent à chacun des intervalles $\left]a, a + \frac{1}{n}\right[, n \geq 1$. Il existe de ce fait un $u_n \in \mathbb{Q}$ telque $u_n \in \left]a, a + \frac{1}{n}\right[, n \geq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres rationnels converge vers a. $\blacklozenge$

Propriété des segments emboîtés : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites de nombres réels telles : $\forall n, \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Alors

$$\bigcup_{n+1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Le résultat suit, dit de **Bolzano-Weierstrass**, occupe une place centrale en Analyse.

Théorème 2.4.3 *De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une sous-suite convergente.*

Preuve : Admis

Définition 2.4.1 *Une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels ou complexes est de* **Cauchy** *si, pour chaque $\varepsilon > 0$, Il existe n_0 tel que, pour chaque $m, n \geq n_0$, on a $|u_m - u_n| \leq \varepsilon$.*

Théorème 2.4.4 *Une suite de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est de Cauchy.*

Preuve : Il est clair que toute suite convergente est de Cauchy. Inversement, supposons que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy de nombres réels. Il existe n_0 tel que, pour chaque $m, n \geq n_0$, on a $|u_m - u_n| \leq 1$. Donc, pour tout $n > n_0$, on a $|u_n - u_{n_0}| \leq 1$ soit que $-|u_{n_0}| - 1 \leq |u_n| \leq |u_{n_0}| + 1$. En posant M le maximum de l'ensemble $\{|u_1|, \cdots, |u_{n_0}|, |u_{n_0}| + 1\}$, alors $|u_k| \leq M$ pour tout entier k. La suite étant bornée, d'après la théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraite une sous-suite convergente $(u_{n_k})_{k\leq 1}$ qui converge vers un réel ℓ.
Nous allons vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, elle aussi, vers ℓ. Donnons-nous un réel $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy il existe un entier n_1 tel que, pour $p, q \geq n_1$, on a $|u_p - u_q| \leq \varepsilon/2$. Puisque la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ, il existe un entier k_1 tel que, pour tout $k \geq k_1$, on a $|\ell - u_{n_k}| \leq \varepsilon/2$. Soit k_1 un entier $\geq max(n_1, k_1)$ et $N' = n_{k_1}$. Il est clair que $N' \geq n_1$. Pour chaque $n \geq N'$ nous avons

$$|u_n - l| \leq |u_n - u_{N'}| + |\ell - u_{n_{k_1}}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad \blacklozenge$$

Nous avons, en fait, montré que si, une suite de Chauchy de $\mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente, elle converge, elle aussi, vers la même limits.

2.5 Suites récurrentes linéaires

Notons par $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. *On appelle* **suite récurrente linéaire**, *toute suite $(u_n) \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ définie par la donnée de u_0 et u_1 et par une relation de récurrence*

$$\boxed{\exists (a, b) \in \mathbb{K}^2 \ \text{ et } \ u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = f(n),}$$

où $f(n)$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Lorsque $f(n) = 0$, la suite récurrente linéaire est dite **homogène**.

☞ **Exemple 2.5.1** La suite de Fibonacci est la suite réelle (u_n) définie par ses premiers termes $u_0 = u_1 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ n \geq 0$. ◆

2.5.1 Suites récurrentes linéaires homogènes

On suppose que $f(n) = 0$.

Théorème 2.5.1 Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. L'ensemble $\mathcal{S}_{a,b}$ des suites récurrentes, définie par

$$\mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{K}) = \{u \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) : \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, de dimension deux.

Preuve : La première propriété étant évidente. Pour la deuxième, considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{K}) &\rightarrow \quad \mathbb{K}^2 \\ (a, b) \quad &\rightarrow (u_0, u_1). \end{aligned}$$

Il est évident que f est une application $\mathbb{K}$-linéaire. Soit $u \in \mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{K})$ telle que $f(u) = 0$ c-à-d. $u_0 = u_1 = 0$. La relation de récurrence implique que $u_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc $u = 0$, alors f est injective. Pour tout $(\gamma, \theta) \in \mathbb{K}^2$, la suite u définie par

$$u_0 = \gamma, \quad u_1 = \theta \quad \text{et} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

est dans $\mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{K})$ et vérifie $\varphi(u) = (\gamma, \theta)$. Donc φ est surjective. ◆

Une suite géométrique de raison $q \neq 0$ est un élément de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{K})$, si et seulement si, la raison q est solution de l'équation du second degré

$$\boxed{X^2 - aX - b = 0.}$$

C'est l'**équation caractéristique** de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{K})$.

Résolution si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Les cœfficients de l'équation caractéristique a et b sont complexes :

- **$\Delta \neq 0$**, l'équation caractéristique admet 2 racines distinctes q_1 et q_2. Les suites géométriques

$$\boxed{w_n = q_1^n \ \text{ et } \ v_n = q_2^n, \ \forall n \in \mathbb{N},}$$

constituent une base de $\mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{C})$. Les solutions seront de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.}$$

- **$\Delta = 0$**, l'équation caractéristique admet une racine double q. Les couples de suites recherchées sont

$$\boxed{u_n = q^n \ \text{ et } \ v_n = nq^n, \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Les suites de $\mathcal{S}_{a,b}(\mathbb{C})$ seront de la forme

$$\boxed{u_n = (\lambda + n\mu)q^n, \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

Dans les exemples qui suivent, il s'agit de trouver une suite donnée par une relation de récurrence linéaire homogène.

☞ **Exemple 2.5.2** La suite (u_n) est définie par la récurrence

$$u_{n+2} = (1-i)u_{n+1} + iu_n, \quad u_0 = 1 \ \text{ et } \ u_1 = i.$$

Son équation caractéristique est

$$X^2 - (1-i)X - i = 0.$$

Comme $\Delta = 2i = (1-i)^2 \neq 0$. Les racines sont $q_1 = 1$ et $q_2 = -i$. Donc :

$$u_n = \lambda 1^n + \mu(-i)^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2.$$

Les conditions initiales sur u_0 et u_1, déterminent d'une façon unique les scalaires λ et μ

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu = 1 & \Longrightarrow \quad \lambda = 1 + i. \\ u_1 = \lambda - i\mu = i & \Longrightarrow \quad \mu = -i. \end{cases}$$

La suite recherchée est alors

$$u_n = (1 + i) + (-i)^{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

☞ **Exemple 2.5.3** Soit à chercher la suite linéaire donnée par la récurrence

$$u_{n+2} = (1 + i)u_{n+1} + iu_n, \quad u_0 = 1 \ \text{ et } \ u_1 = 1 + i.$$

Son équation caractéristique

$$X^2 - \sqrt{2}(1 + i)X + i = 0$$

est de déscriminant nul. Elle admet donc une racine double

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

La suite (u_n) aura pour terme général

$$u_n = (\lambda + n\mu)q^n.$$

En tenant comptes des conditions initiales, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{2} - 1$. Finalement, on a

$$u_n = [1 + (\sqrt{2} - 1)n] \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Résolution si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

On procède de la même façon que dans le cas complexe. Dans le cas ou le déscriminant est négatif, la solution homogène sera une combinaison de fonctions trigonométriques en n.

- **$\Delta \neq 0$**, l'équation caractéristique admet 2 racines distinctes q_1 et q_2. Les suites recherchées sont

$$w_n = q_1^n \ \text{ et } \ v_n = q_2^n.$$

La solution homogène est

$$\boxed{u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

$\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double q. Alors

$$w_n = q^n \text{ et } v_n = nq^n,$$

la solution homogène est

$$\boxed{u_n = (\lambda + n\mu)q^n, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

$\Delta < 0$ Les racines de l'équation caractéristiques sont complexes, à savoir

$$q_1 = \rho e^{i\theta} \text{ et } q_2 = \rho e^{-i\theta}.$$

Les suites

$$w_n = \rho^n \cos n\theta \text{ et } v_n = \rho^n \sin n\theta,$$

constitue une base de $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R})$. La solution homogène est la suite

$$\boxed{u_n = \rho^n(\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

☞ **Exemple 2.5.4** Soit u la suite de Fibonacci, donnée par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

L'equation caractéristique admet pour racines

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc :

$$u_n = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les conditions initiales nous donnent la solution

$$u_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

☞ **Exemple 2.5.5** La suite de récurrence est définie par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \text{ et } u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

Son équation caractéristique admet une racine double $q = 2$. La solution, après le calcul des constantes λ et μ, est

$$u_n = (2-n)2^{n-1}.$$

☞ **Exemple 2.5.6** Soit u la suite

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n.$$

Son équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées j et $j^2 = \bar{\jmath}$. Donc :

$$u_n = \lambda \cos \frac{2n\pi}{3} + \mu \sin \frac{2n\pi}{3}.$$

Les conditions sur u_0 et u_1 nous donnent $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{3}$

$$u_n = \cos \frac{2n\pi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{2n\pi}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.6 Suites récurrentes avec second membre

La solution générale d'une relations de récurrence définie par

$$u_{n+1} - \alpha u_n - \beta u_{n-1} = f(n)$$

sera égale à la somme de la solution homogène u_n^* et d'une solution particulière qui aura la même forme que le second membre $f(n)$. Par exemple, si $f(n)$ est un polynômes de second degré en n, la solution particulière sera un polynôme du second degré en n dont on calculera les cœfficients.

☞ **Exemple 2.6.1** Considérons la suite récurrente définie par

$$3u_{n+1} - 3u_n + u_{n-1} = 1, \quad u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 0.$$

L'équations homogène associée est

$$3u_{n+1}^* - 3u_n^* + u_{n-1}^* = 0.$$

La solution homogène est alors

$$u_n^* = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n [\lambda \cos(n\pi/6) + \mu \sin(n\pi/6)].$$

A ce stade on ne calcule pas λ et μ. Le second membre est un polynôme de degré 0, donc une constante. On cherche la solution particulière de la forme $u_n = k$, ce qui entraine $3k - 3k + k = 1$ donc $k = 1$. La solution générale est alors

$$u_n = u_n^* + k = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n [\lambda \cos(n\pi/6) + \mu \sin(n\pi/6)] + 1.$$

D'après les conditions initiales, on trouve

$$\lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mu = -2\sqrt{3}.$$

La solutions générale qui correspond à ces valeurs est

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n \sqrt{3}\sin(n\pi/6) + 1.$$

☞ **Exemple 2.6.2** Soit la suite récurrente définie par

$$2u_{n+1} - u_n = \sin(n\pi/4), \quad u_0 = 0.$$

Le second membre est la partie imaginaire de $[e^{i\pi/4}]^n$. La suite u_n cherchée sera considérée comme la partie imaginaire de z_n telle que

$$2z_{n+1} - z_n = [e^{i\pi/4}]^n.$$

On trouve que

$$z_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + v_n$$

où v_n est une solution particulière que l'on cherche sous la forme

$$v_n = k[e^{i\pi/4}]^n.$$

On obtient $k = 1/(e^{i\pi/4} - 1)$. Donc :

$$\begin{aligned} u_n = \mathfrak{Im}\ z_n &= \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mathfrak{Im}\ v_n \\ &= \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{2}-1}{5-2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

La solution générale correspondante aux conditions initiales est

$$u_n = \frac{\sqrt{2}-1}{5-2\sqrt{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right].$$

2.7 Exercices Corrigés

Exercice 3.6.1. ☞ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$$

① Montrer que la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$

② Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

③ Montrer que $u_n \leq n$ puis que $u_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$.

④ Donner un terme équivalent à u_n.

⑤ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \sqrt{n})$.

Solution.

① La suite étant positive, on remarque que $u_n \geq \sqrt{n}$ est divergente vers $+\infty$

② Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

③ Montrer que $u_n \leq n$ puis que $u_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$.

④ Donner un terme équivalent à u_n.

⑤ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \sqrt{n})$. ◆

Exercice 3.6.2. ☞ Considérons une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n-1}}{6} \quad \text{avec} \quad u_0 \quad \text{et} \quad u_1 \in \mathbb{R}.$$

Calculer u_n en fonction de n, u_0 et u_1.

Solution. Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2, linéaire et à cœfficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 = \dfrac{r+1}{r}$. Ces racines sont $r_1 = -1/3$ et $r_2 = 1/2$. Par conséquent, il existe deux réels a et b tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a\left(-\frac{1}{3}\right)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Le calcul de a et b se fait en considérant les cas $n = 0$ et $n = 1$. On trouve, en résolvant un système à deux inconnues que a et b s'écrivent en fonction de u_0 et u_1, à savoir

$$a = \left(\frac{3}{5}u_0 - \frac{6}{5}u_1\right) \qquad \text{et} \qquad b = \left(\frac{3}{5}u_0 + \frac{6}{5}u_1\right).$$

En remplaçant a et b, on obtient l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n. ◆

Exercice 3.6.3. ☞ Considérons une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1}.$$

On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

① Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

② Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n + \dfrac{1}{2}$ puis que $u_n \geq u_0 + \dfrac{n}{2}$.

③ En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Solution. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^+$.

① On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \geqslant 0$

Initialisation $n = 0$: $u_0 \geqslant 0$ d'après l'énoncé donc la proposition $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité: Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \geqslant 0$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant 0$. La relation de récurrence nous donne

$$u_{n+1} = \frac{2u_n^2 + 2u_n + 1}{2u_n + 1} \geqslant 0,$$

car le numérateur et le dénominateur sont positifs, donc la proposition $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

② La première minoration représentant une relation (ici une inégalité) entre deux termes successifs de la suite u, la preuve s'établit directement et non par récurrence. Pour cela, nous allons étudier le signe de la différence

$$u_{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{2u_n + 1} \geqslant 0 \Rightarrow u_{n+1} \geqslant u_n + \frac{1}{2}$$

La seconde minoration est une minoration entre le terme générale de la suite et une autre suite, on essait une récurrence (qui va convenir ici)
On pose $(\mathcal{P}_n)$: $u_n \geqslant u_0 + \frac{n}{2}$.
Initilisation $n = 0$: $u_0 + \frac{0}{2} = u_0$ d'où l'inégalité $u_0 \geqslant u_0 + \frac{0}{2}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Héridité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $u_n \geqslant u_0 + \frac{n}{2}$ et montrons que $u_{n+1} \geqslant u_0 + \frac{n+1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} \geqslant u_n + \frac{1}{2} \\ u_n \geqslant u_0 + \frac{n}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow u_{n+1} \geqslant \left(u_0 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} = u_0 + \frac{n+1}{2}$$

donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

③ Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(u_0 + \frac{n}{2}\right) = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant u_0 + \frac{n}{2}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ◆

Exercice 3.6.4. ☞ On considère les suites u et v définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{4n-1}.$$

Montrer que les suites u et v sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers une même limite L.

Solution. Monotonie de la suite u :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(4n+1)(4n+3)} > 0$$

donc la suite u est croissante.
Monotonie de la suite v

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-8n-6}{(4n+1)(4n+3)(4n-1)} < 0$$

donc la suite v est décroissante.
Pour finir, il est immédiat que $v_n - u_n = \dfrac{1}{4n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc les suites u et v sont bien adjacentes, ce qui impliquent qu'elles convergent vers la même limite L. ◆

Exercice 3.6.5. ☞

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^3+6x+1}{9}$ et l'on définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{(u_n)^3 + 6u_n + 1}{9}$.

① Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

② Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$.. En déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

③ Montrer que $\forall x \in [0, \alpha]\,, \quad x \leqslant f(x)$.

④ Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

⑤ A l'aide de la question 3, donner la monotonie de la suite u.

⑥ En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et justifier que sa limite est α.

Solution.

① La fonction $g : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (c'est un polynôme), dérivable sur cet intervalle (c'est un polynôme) et sa dérivée vaut $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$ qui est strictement négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante et continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$.
Puisque $0 \in \left[-\frac{3}{8}, 1\right]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$).

② $\dfrac{x^3 + 6x + 1}{9} = x \Leftrightarrow x^3 + 6x + 1 = 9x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$. Par conséquent, les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont exactement les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Comme cette dernière équation admet comme unique solution α sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on en déduit que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

③ On considère la fonction $h : x \mapsto f(x) - x = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{9} = \dfrac{g(x)}{9}$.
La fonction g étant strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ (question 1) donc sur $[0, \alpha]$. Comme $h(0) = \dfrac{g(0)}{9} = \dfrac{1}{9}$ et $h(\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{9} = 0$ (car α solution de l'équation $g(x) = 0$), on en déduit que la fonction h est positive sur $[0, \alpha]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [0, \alpha], \quad f(x) \geqslant x$.

④ On pose $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.
Initialisation $n = 0$: $u_0 = 0$ et $\alpha \geqslant 0$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et montrons que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$

$$0 \leqslant u_n \leqslant \alpha \Rightarrow \frac{1}{9} \leqslant \underbrace{\frac{(u_n)^3 + 6u_n + 1}{9}}_{=u_{n+1}} \leqslant \frac{\alpha^3 + 6\alpha + 1}{9} = \alpha$$

(α est solution de $f(x) = x$) donc $0 \leqslant \frac{1}{0} \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

⑤ Puisque l'on a $\forall x \in [0, \alpha], \quad f(x) \geqslant x$, en choisissant $x = u_n$ (ce qui est licite car $u_n \in [0, \alpha]$), on obtient $\underbrace{f(u_n)}_{=u_{n+1}} \geqslant u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \geqslant u_n$.

⑥ La suite u est majorée par α (question 4) et croissante (question 5) donc elle converge et sa limite L vérifie $0 \leqslant L \leqslant \alpha$.
Calcul de la limite : Puisque la fonction f est continue sur $[0, \alpha]$, en passant à limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a $L = f(L)$. Donc L est solution de l'équation $f(x) = x$. Comme $0 \leqslant L \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$, la limite L est une solution sur l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de l'équation $f(x) = x$. La question 2 montre que la seule solution de cette équation sur cet intervalle est α donc $L = \alpha$ et la suite u converge vers α.

Exercice 3.6.7. ☞ On considère les suites u, v et w définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ u_n = \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}\right) - \ln(n), \quad v_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \dfrac{w_n}{w_n^2 + w_n + 1} \end{cases}$$

On admet l'encadrement suivant

$$\boxed{(E) : \forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \ln(n+2) - \ln(n+1) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n}.$$

1. Etude de la suite u.

   (a) Donner la monotonie de la suite u.

   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 1, \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \ln(n)$.

   (c) Montrer que la suite u est comprise entre 0 et 1.

   (d) En déduire la convergence de la suite u (on ne demande pas de calculer cette limite).

2. Etude de la suite v.

   (a) Etudier la montonie de la suite v.

   (b) En majorant $\frac{1}{p}$, justifier que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v_n \leqslant \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$.

   (c) Calculer $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad v_n \leqslant 1$.

   (d) Justifier que la suite v converge et donner une majoration de sa limite.

   (e) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_{2n} - u_n = v_n - \ln 2$. En déduire que $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ln 2$.

3. Etude de la suite w.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant w_n \leqslant 1$.

   (b) Donner la monotonie de la suite w. En déduire la convergence de la suite w et donner sa limite.

4. Etude asymptotique de la suite w.

   (a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{w_{n+1}} = w_n + 1 + \frac{1}{w_n}$.

   (b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{w_n} \geqslant n + 1$.

   (c) En combinant les questions 4.a) et 4.b), établir alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \frac{1}{w_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

   (d) En utilisant la question 1.b), justifier que $\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{w_n} \leqslant n + 2 + \ln(n)$.

   (e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \frac{1}{n + 2 + \ln n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   (f) Calculer les limites suivantes : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + 2 + \ln n}, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}$.
   En déduire que la suite $(nw_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Solution.

1. (a)

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left[\left(\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\right)-\ln(n+1)\right]-\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)-\ln(n)\right] \\ &= \left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}\right)-\ln(n+1)\right]-\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)-\ln(n)\right] \\ &= \frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln(n)\leqslant 0 \quad \text{(d'après l'encadrement } (E)) \end{aligned}$$

donc la suite u est décroissante.

(b) On pose $(\mathcal{P}_n) : \ln(n+1)\leqslant \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\leqslant 1+\ln(n)$.

Initialisation $n=1$: $\ln 1 = 0$, $\sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p}=\frac{1}{1}=1$, $1+\ln 1 = 1$ donc on a bien $\ln 1\leqslant \sum_{p=1}^{1}\frac{1}{p}\leqslant 1+\ln 1$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\ln(n+1)\leqslant \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\leqslant 1+\ln(n)$ et montrons que

$$\ln(n+2)\leqslant \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\leqslant 1+\ln(n+1).$$

En remarquant que $\sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}$, on a

$$\left.\begin{aligned} \ln(n+1)\leqslant \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\leqslant 1+\ln(n) \quad (\mathcal{P}_n) \\ \ln(n+2)-\ln(n+1)\leqslant \frac{1}{n+1}\leqslant \ln(n+1)-\ln n \quad (E) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ \ln(n+1)+\ln(n+2)-\ln(n+1) \\ &\leqslant\ \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}+\frac{1}{n+1}\leqslant 1+\ln(n)+\ln(n+1)-\ln n \\ &\Leftrightarrow\ \ln(n+2)\leqslant \sum_{p=1}^{n+1}\frac{1}{p}\leqslant 1+\ln(n+1) \end{aligned}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) La question 1.b) montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{\ln(n+1) - \ln n}_{\geqslant 0} \leqslant u_n \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

(d) La suite u est décroissante (question 1.a) et minorée par 0 (question 1.c) donc elle converge (et sa limite est comprise en 0 et 1).

2. (a) On étudie le signe de $v_{n+1} - v_n$

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{p=(n+1)+1}^{2(n+1)} \frac{1}{p} - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{p=n+2}^{2n+2} \frac{1}{p} - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$$

Les indices communs aux deux sommes est constitué des indices compris entre $n+2$ ete $2n$. En utilisant la relation de Chasles correspondant à ces indices communs, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(\sum_{p=n+2}^{2n} \frac{1}{p} + \sum_{p=2n+1}^{2n+2} \frac{1}{p}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \sum_{p=n+2}^{2n} \frac{1}{p}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{2(n+1) - (2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geqslant 0 \end{aligned}$$

donc la suite v est croissante.

(b) Pour tout $p \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $n+1 \leqslant p \leqslant 2n \Leftrightarrow \dfrac{1}{2n} \leqslant \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc en sommant sur $[\![n+1, 2n]\!]$, on obtient

$$v_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} \leqslant \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$$

(c) Le terme général de la somme $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1}$ étant indépendant de l'indice de sommation p, on a simplement

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2n - (n+1) + 1) = \frac{n}{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow v_n \leqslant 1$$

(d) La suite v est croissante et majorée par 1 donc elle converge et sa limite est inférieure ou égale à 1.

(e)

$$\begin{aligned}
u_{2n}-u_n &= \left[\left(\sum_{p=1}^{2n}\frac{1}{p}\right)-\ln(2n)\right]-\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)-\ln n\right]\\
&= \left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)+\left(\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}\right)\right]-\left[\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\right)\right]-\ln(2n)+\ln n\\
&= \sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}+\ln\left(\frac{n}{2n}\right)=\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}+\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{p=n+1}^{2n}\frac{1}{p}-\ln 2=v_n-\ln 2
\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, on ne déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_n)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-\ln 2)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ln 2$.

Remarque : *cette limite est bien comprise entre* 0 *et* 1,*ce qui est compatible avec la question 2.d).*

3. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : 0 \leqslant w_n \leqslant 1$.
Initialisation $n=0$: $w_0=1$ donc $0\leqslant w_0\leqslant 1$ et $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $0\leqslant w_n\leqslant 1$ et montrons que $0\leqslant w_{n+1}\leqslant 1$.
Pour commencer, $w_n\geqslant 0$ et $w_n^2+w_n+1\geqslant 1>0$ donc w_{n+1} aussi (comme quotient de deux positifs). Ensuite, puisque l'on a évidemment $w_n^2+w_n+1\geqslant w_n\geqslant 0$, le quotient $\dfrac{w_n}{w_n^2+w_n+1}=w_{n+1}$ est inférieur à 1 ("le plus petit divisé par le plus grand"), ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) $w_{n+1}-w_n=\dfrac{w_n}{w_n^2+w_n+1}-w_n=\underbrace{w_n}_{\geqslant 0}\dfrac{\overbrace{-w_n^2-w_n}^{\leqslant 0}}{\underbrace{w_n^2+w_n+1}_{\geqslant 0}}\leqslant 0$ donc la suite w est décroissante. En outre, elle est minorée par 0 donc elle converge et sa limite L est comprise entre 0 et 1.
Calcul de la limite : Puisque la fonction $x\mapsto \dfrac{x}{x^2+x+1}$ est continue sur $[0,1]$, en passant à la limite dans l'égalité $w_{n+1}=\dfrac{w_n}{w_n^2+w_n+1}$, on obtient

$$\begin{aligned}
L &= \frac{L}{L^2+L+1}\Leftrightarrow L(L^2+L+1)=L\Leftrightarrow L^3+L^2+L=L\\
&\Leftrightarrow L^3+L^2=0\Leftrightarrow L^2(L+1)=0\Leftrightarrow L\in\{0,-1\}
\end{aligned}$$

Puisque $L\in[0,1]$, on en déduit que $L=0$ et la suite u converge vers 0.

4. (a) $\dfrac{1}{w_{n+1}}=\dfrac{w_n^2+w_n+1}{w_n}=w_n+1+\dfrac{1}{w_n}$.

(b) On pose $(\mathcal{P}_n) : \dfrac{1}{w_n} \geqslant n+1$.

Initialisation $n=0$: $\dfrac{1}{w_0} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $0+1=1$ donc $\dfrac{1}{w_0} \geqslant 0+1$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\dfrac{1}{w_n} \geqslant n+1$ et montrons que $\dfrac{1}{w_n} \geqslant n+2$. On a

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{w_n} \geqslant n+1 \quad (\mathcal{P}_n) \\ \dfrac{1}{w_{n+1}} = w_n + 1 + \dfrac{1}{w_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \geqslant n+2+\underbrace{\frac{1}{w_n}}_{\geqslant 0} \geqslant n+2 \Leftrightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \geqslant n+2$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) On pose $(\mathcal{P}_n) : \dfrac{1}{w_n} \leqslant n+1+\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Initialisation $n=1$: $\dfrac{1}{w_1} = w_0+1+\dfrac{1}{w_0} = 1+1+1 = 3$ et $1+1+\sum\limits_{k=1}^{1}\dfrac{1}{k} = 1+1+1=3$ donc $\dfrac{1}{w_1} \leqslant 1+1+\sum\limits_{k=1}^{1}\dfrac{1}{k}$, ce qui montre que $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons $(\mathcal{P}_n)$ vraie et montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$, c'est-à-dire supposons que $\dfrac{1}{w_n} \leqslant n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ et montrons que

$$\frac{1}{w_{n+1}} \leqslant (n+1)+1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \leqslant n+2+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

On a

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{w_n} \leqslant n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \quad (\mathcal{P}_n) \\ \dfrac{1}{w_{n+1}} = w_n+1+\dfrac{1}{w_n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{w_{n+1}} \leqslant w_n+1+n+1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = w_n+n+2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

D'après la question 4.b), on a $\dfrac{1}{w_n} \geqslant n+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{w_n} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc

$$\frac{1}{w_{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}+n+2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n+2+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) On a

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p} \leqslant 1+\ln(n) & \text{(question 1.b)} \\ \dfrac{1}{w_n} \leqslant n+1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} & \text{(question 4.c)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{w_n} \leqslant n+1+1+\ln n = n+2+\ln n$$

(e) On a

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{w_n} \geqslant n+1 \quad \text{(question 4.b)} \\ \dfrac{1}{w_n} \leqslant n+2+\ln n \quad \text{(question 4.d)} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} w_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} \\ w_n \geqslant \dfrac{1}{n+2+\ln n} \end{array}\right\}$$

donc

$$\frac{1}{n+2+\ln n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

(f) En multipliant par n l'encadrement de la question 4.e), on obtient

$$\frac{n}{n+2+\ln n} \leqslant nw_n \leqslant \frac{n}{n+1}$$

Calculons maintenant les limites des membres de gauche et de droite de cet encadrement

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+2+\ln n} &= \frac{n}{n\left(1+\dfrac{2}{n}=\dfrac{\ln n}{n}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{n}=\dfrac{\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1}=1 \\ \frac{n}{n+1} &= \frac{n}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1}=1 \end{aligned}$$

L'application du théorème d'encadrement nous donne $\lim\limits_{n\to+\infty} nw_n = 1$.

Exercice 3.6.8. ☞

Soient a et b des réels strictement positifs.

① Montrer qu'on peut définir deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_0 = a,\ y_0 = b,\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n+y_n} \ ,\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n+y_n}$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.

② Prouver que la suite $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.

③ Établir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente, puis calculer les limites des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution.

① On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n sont définis et strictement positifs. C'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n, on a $x_n + y_n > 0$, donc x_{n+1} et y_{n+1} sont définis et strictement positifs.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que

$$x_{n+1} - y_n + 1 = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = x_n - y_n.$$

La suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. Sa valeur est donc égale à sa valeur pour $n = 0$, c'est-à-dire $x_0 - y_0 = a - b$. En d'autres termes, on a $y_n = x_n + b - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_n + y_n} \leq 1,$$

ce qui montre que la suite $(x_n)n \in \mathbb{N}$ est décroissante. Comme elle est positive, on en déduit qu'elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. Le résultat de la question ② indique alors que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell + b - a$. Comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on obtient aussi $\ell + b - a \geq 0$. On cherche à déterminer ℓ. On a

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \ell, \ \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \ell^2 \ \text{ et } \ \lim_{n\to\infty} x_n + y_n = 2\ell + b - a.$$

Premier cas : $\boldsymbol{a > b}$. Comme $\ell \geq a - b > 0$ et $2\ell + b - a = \ell + \ell + b - a \geq \ell > 0$, on obtient donc $\ell = \dfrac{\ell^2}{2\ell + b - a}$, puis, comme $\ell \neq 0$, $\ell = a - b$. Donc, dans ce cas,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a - b, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Deuxième cas : $\boldsymbol{a = b}$. Ici, $x_n = y_n$ et ces deux suites convergent vers ℓ. Si $\ell > 0$, on obtient que $\ell = \dfrac{\ell^2}{2\ell}$, ce qui donne $\ell = 2\ell$, impossible pour $\ell > 0$. Dans ce cas, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Troisième cas : $\boldsymbol{a < b}$. Ici, $2\ell + b - a > 0$. Si $\ell > 0$, on obtient $\ell = 2\ell + b - a$, donc $\ell = a - b$, ce qui est impossible car $\ell \geq 0$. On en déduit que $\ell = 0$. Dans ce cas,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b - a.$$

Exercice 3.6.9. ☞ Soit a un réel > 0. Pour chaque réel $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right).$$

① Soit λ un réel > 0. Montrer qu'il existe une suite de réels $(u_n)_{n\geq 1}$, et une seule, telle que $u_1 = \lambda$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = f(u_{n-1})$. Montrer que, pour chaque entier $n \geq 1$, $u_n > 0$.

② Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$ on a $u_n \geq a$ [calculer $u_n - a$].

③ Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.

④ La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite ?

Solution. Soit $a > 0$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right)$.

① On veut montrer que l'on peut construire par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que $u_1 = \lambda$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}}\right)$. Remarquons, dans un premier temps, que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ (comme somme de termes strictement positifs). Le premier terme de la suite $u_1 = \lambda > 0$ est donné. Supposons que l'on puisse construire $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ et que, de plus, $u_k > 0$ pour tout $k = 1, \cdots, n-1$. Comme $u_{n-1} > 0$, on en déduit d'après la remarque ci-dessus que l'on peut évaluer f en u_{n-1} et que $f(u_{n-1}) > 0$. On pose alors $u_n = f(u_{n-1})$ et on a $u_n > 0$. Ainsi, on construit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ comme demandé dans l'énoncé.

② Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n - a = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}}\right) - a = \frac{1}{2u_{n-1}}\left(u_{n-1}^2 + a^2 - 2au_{n-1}\right) = \frac{1}{2u_{n-1}}(u_{n-1} - a)^2 \geq 0.$$

Ainsi, $u_n \geq a$ pour tout $n \geq 2$.

③ Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right) - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + a^2 - 2u_n^2\right) = \frac{1}{2}\left(a^2 - u_n^2\right).$$

Comme d'après la question précédente, $u_n \geq a > 0$, on a $a_2 \leq u_n^2$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 2$; ainsi, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 2$.

④ D'après la question 3, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante (à partir du rang $n = 2$). D'après la question 2, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par a. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Soit ℓ sa limite. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a $\ell \geq a > 0$. De plus, on sait que si une suite de réels strictement positifs converge vers une limite strictement positive, alors la suite des inverses converge vers l'inverse de la limite. Autrement dit, on a $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{1}{\ell}$. De plus, la somme de deux suites convergentes est convergente et sa limite est la somme des limites; ainsi, on a $\left(\dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{a^2}{u_n})\right)_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\dfrac{1}{2}(\ell + \dfrac{a^2}{\ell})$. D'après la relation de récurrence que vérifie la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, et par unicité de la limite d'une suite convergente, on a finalement $\ell = \dfrac{1}{2}(\ell + \dfrac{a^2}{\ell})$. En résolvant cette équation, sachant que $\ell > 0$, on trouve $\ell = a$.

2.8 Problèmes Corrigés

Les résultats des problèmes qui suivent peuvent être considérés comme un prolongement et une suite logique du cours. Leurs compréhension est, de ce fait, indispensable.

Énoncé 1

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{Z}^n$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire.

Solution

Si $(u_n)_n$ est stationnaire, il est clair que cette suite converge. Inversement, supposons que $(u_n)_n$ converge. Notons ℓ sa limite. Montrons $\ell \in \mathbb{Z}$. Par l'absurde, si $\ell \notin \mathbb{Z}$ alors $E(\ell) < \ell < E(\ell)+1$ donc à partir d'un certain rang $E(\ell) < u_n < E(\ell)+1$. Or $u_n \in \mathbb{Z}$; ce qui est absurde. Ainsi $\ell \in \mathbb{Z}$.
Puisque $u_n \to \ell$ et $\ell-1 < \ell < \ell+1$, à partir d'un certain rang $\ell-1 < u_n < \ell+1$. Donc $-1 < u_n - \ell < 1$; mais $u_n \in \mathbb{Z}$ et $\ell \in \mathbb{Z}$ donc $u_n = \ell$. Finalement, (u_n) est stationnaire égale à ℓ. ◆

Énoncé 2 (Moyenne arithmético-géométrique) :

① Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^+$. Etablir : $2\sqrt{ab} \leq a+b$.

② On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

③ Etablir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite. Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

④ Calculer $M(a,a)$ et $M(a,0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.

⑤ Exprimer $M(\lambda a, \lambda b)$ en fonction de $M(a,b)$ pour $\lambda \in R^+$.

Solution

① Ceci est obtenu en débeloppant $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$.

② Pour $n=1$, $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq \dfrac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n$ en vertu de ① .

③ La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et majorée par v_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ. La suite $(v_n)_{n\neq 1}$ est décroissante est minorée par u_1 donc elle converge vers une limite notée ℓ'. En passant la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ à la limite, on obtient $\ell' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$ d'où $\ell = \ell'$

④ Si $b = a$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) sont constantes égales à a et donc $M(a, a) = a$. Si $b = 0$ alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante égale à 0 et donc $M(a, 0) = 0$.

④ Notons (u'_n) et (v'_n) les suites définies par le procédé précédent à partir de $u'_0 = \lambda a$ et $v'_0 = \lambda b$. Par récurrence, $u'_n = \lambda u$ et $v'_n = \lambda v$ donc $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$.

Énoncé 3 :

① Montrer que pour tout réel x :

$$E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x).$$

② En déduire que $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{p} E\left(\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right)$ où n est un entier naturel donné.

Solution

① Posons $E(x) = n$ avec $n \leq x \leq n+1$.
Si $n = 2p$, on a $p \leq \dfrac{x}{2} < p + \dfrac{1}{2}$, $p + \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x+1}{2} < p+1$, donc

$$E\left(\frac{x}{2}\right) = p, \quad E\left(\frac{x+1}{2}\right) = p \quad \text{et} \quad E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2p = E(x).$$

Si $n = 2p+1$, on a $p \leq \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{x}{2} < p+1$, $p+1 \leq \dfrac{x+1}{2} < p + \dfrac{1}{3}$, donc

$$E\left(\frac{x}{2}\right) = p, \quad E\left(\frac{x+1}{2}\right) = p+1 \quad \text{et} \quad E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2p+1 = E(x).$$

② D'après 1), on a

$$E\left(\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right) = E\left(\frac{n2^{-k}+1}{2}\right) = E\left(n2^{-k}\right) - E(n2^{-(k+1)}.$$

On en déduit que

$$u_p = \sum_{k=0}^{p} E\left(\frac{n = 2^k}{2^{k+1}}\right) = \sum_{k=0}^{p} E\left(\frac{n}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{p} E\left(\frac{n}{2^{k+1}}\right).$$

Soit que

$$u_p = \sum_{k=0}^{p} E\left(\frac{n}{2^k}\right) - \sum_{k=1}^{p+1} E\left(\frac{n}{2^k}\right).$$

Après réduction

$$u_p = E(n) - E\left(\frac{n}{2^{p+1}}\right) = n - E\left(\frac{n}{2^{n+1}}\right).$$

A partir d'un certain rang p_0, on a $2^{p+1} > n$ donc $u_p = n$. Ainsi, la suite (u_p) est constante à partir de p_0 et on a $\lim_{p\to+\infty} u_p = n$.

Chapitre 3

Continuité et dérivabilité des fonctions

3.1 Limite d'une fonction

Définition. *Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un* **voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$** *s'il contient un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.*

Notons par $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point x_0. Ainsi, on peut reformuler les termes de la définition précédente de la manière suivante :

$$\boxed{V \in \mathcal{V}(x_0) \iff \exists \eta \in \mathbb{R}_+^* \ : \ ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset V.}$$

☞ **Exemple 3.1.1** L'intervalle fermé $[-1, 1]$ est un voisinage de 0. En fait $[-1, 1]$ est un voisinage de chaque $a \in]-1, 1[$, mais il ne peut être ni voisinage de -1 ni de 1. ◆

Définition. *On dit qu'une fonction f définie au voisiange du point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut-être au point x_0, admet une* **limite ℓ en x_0**, *si :*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 \ \text{ tel que } \ |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.}$$

On écrit dans ce cas, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

☞ **Exemple 3.1.2** Considérons la fonction $f(x) = 2x - 1$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Au point $x = 1$, on a $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x) - 1| = 2|x - 1| < \varepsilon$ si l'on a, à fortiori, $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Le bon choix sera alors de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. ◆

Pour montrer que la fonction f n'admet pas de limite au point x_0, il suffit de prendre la négation de la définition. D'autre part,

Proposition 3.1.1 Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.

Preuve : Si f admet deux limites ℓ et ℓ' au point x_0, alors on a, par définition :

$$\begin{array}{llll} \forall \varepsilon > 0 & , \exists \eta > 0 & \text{tel que } |x - x_0| \leq \eta & \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2 \\ \forall \varepsilon > 0 & , \exists \eta' > 0 & \text{tel que } |x - x_0| \leq \eta' & \Longrightarrow |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon/2 \end{array}$$

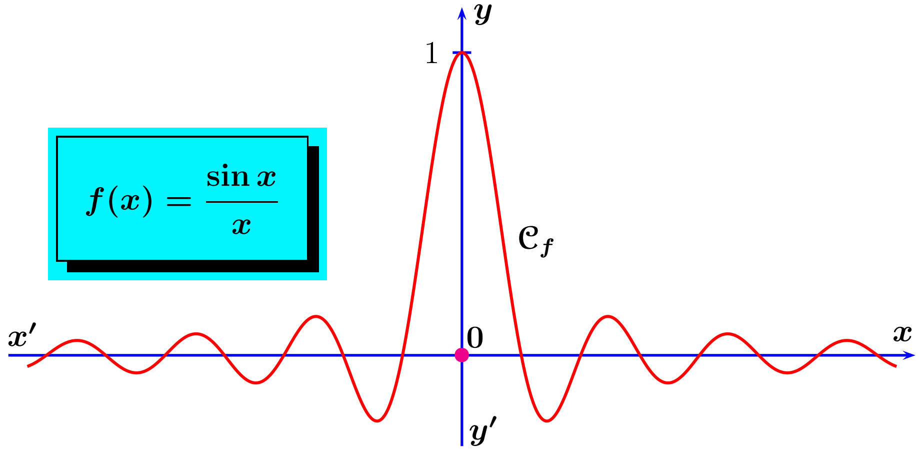
Posons $\eta'' = \min(\eta, \eta')$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta" > 0 \ \text{ tel que } \ |x - x_0| \leq \eta" \ \Longrightarrow |\ell - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \leq \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque alors $|\ell - \ell'| < \varepsilon$ entraine que $\ell = \ell'$. ◆

☞ **Exemple 3.1.3** Montrer que $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$. On a $|\cos x - 1| = |1 - \cos x| = \left| 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) \right|$. Mais $\lim_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0$, alors $\lim_{x \to 0} |\cos x - 1| = 0$. D'où le résultat. ◆

☞ **Exemple 3.1.4** Considérons la fonction f dont le graphe a pour allure



Lorsque $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ alors $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$. Comme $\cos x > 0$, on obtient $x \cos x \leq \sin x \leq x$ et alors $\cos x \leq \dfrac{\sin x}{x} \leq 1$. D'où

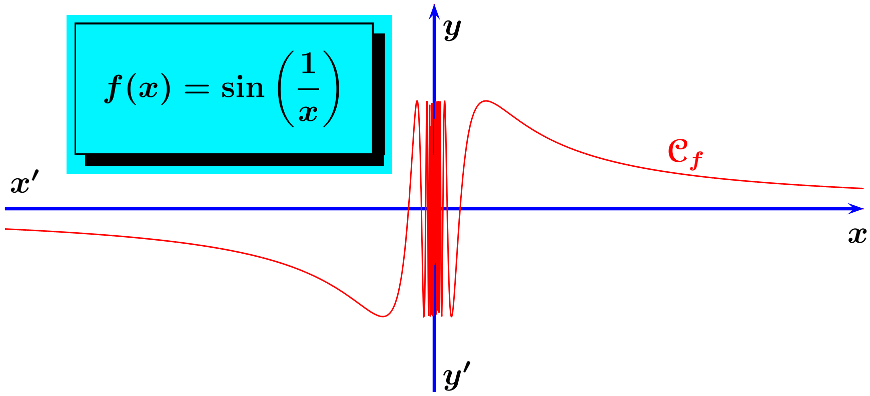
$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

On a la caractérisation suivante, à l'aide des suites, de la notion de limite :

Proposition 3.1.2 Si $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{I}$ on a : $x_0 = \lim\limits_n x_n \implies \lim\limits_n f(x_n) = b$.

Preuve : On montre l'équivalence dans les deux sens. **Condition nécéssaire** : Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{I}$. Ceci s'écrit, par définition : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{I}, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - b| \leq \varepsilon$. Comme $x_0 = \lim\limits_n x_n$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|x_n - x_0| \leq \eta$. En récapitulant, on obtient $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |f(x_n) - b| \leq \varepsilon$. Ce qui signifie bien que la suite $(f(x_n))$ tend vers β. **Condition suffisante** : Supposons que b n'est pas limite de f en x_0. La contraposée de la définition de la limite nous donne $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{I}, |x - x_0| \leq \eta$ et $|f(x) - b| > \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in \mathbb{I}$ tel que $|x_n - x_0| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - b| > \varepsilon$. Donc, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet x_0 comme limite, cependant, b n'est pas limite de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. ◆

☞ **Exemple 3.1.5** La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \to \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite au point 0 :



En effet, considérons les suites $x_n = \frac{1}{n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi + (\pi/2)}$. Elles convergent toutes les deux vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et pourtant on a $\sin(x_n) = 0$ et $\sin(y_n) = 1$. Comme les deux limites sont défférentes donc f n'admet pas de limite au point 0. ◆

On est maintenant en mesure de définir les limites à gauche et à droite d'un point donné.

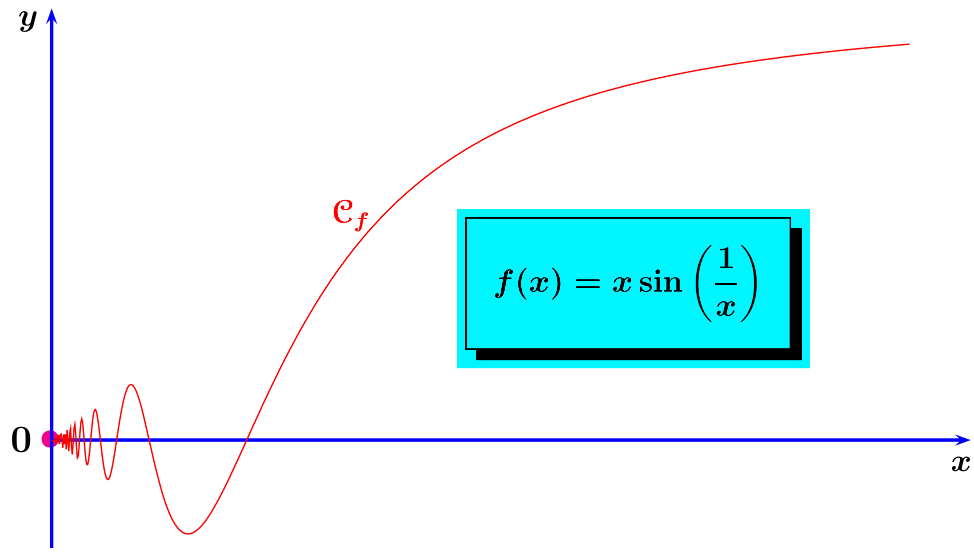
Définition. *On dit que la fonction f admet ℓ comme* **limite à droite de x_0**, *c'est-à-dire quand x tend vers x_0^+, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que : $x_0 < x < x_0 + \delta$ entraine $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On notera, dans ce cas :*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell.}$$

On dit que la fonction f admet ℓ comme **limite à gauche de x_0**, *c'est-à-dire quand x tend vers x_0^-, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que : $x_0 - \delta < x < x_0$ entraine $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On notera, dans ce cas :*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.}$$

☞ **Exemple 3.1.6** La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 lorsque $x \to 0^+$:



Si la fonction f admet une limite ℓ à gauche du point x_0 et une limite ℓ' à droite de x_0, pour que f admet une limite au point x_0 il faut et il suffit que $\ell = \ell'$.

☞ **Exemple 3.1.7** Considérons la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Elle admet 1 comme limite à droite de 0 et -1 comme limite à gauche de 0. Mais elle n'admet aucune limite au point 0. En fait f n'est autre que la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{|x|}{x}$. ◆

3.2 Continuité d'une fonction

Définition. *Soit $x_0 \in \mathbb{I}$. On dit que la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ est* **continue** *au point x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$, quand x tend vers x_0 pour tout $x \in \mathbb{I}$, ce qui s'écrit*

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).}$$

On peut formuler ceci de la façon suivante

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.}$$

☞ **Exemple 3.2.1** Soit la fonction réelle f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$, on a

$$|f(x) - f(0)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|.$$

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}^*$, on choisira $\eta = \varepsilon$. Ainsi

$$|x| \leq \eta \implies |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Donc f est continue au point $x_0 = 0$. ◆

☞ **Exemple 3.2.2** Les fonctions Id : $x \to x$ et $x \to x^2$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Par contre, la fonction $x \to \sqrt{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}_*^+$. Pour les deux premières, on applique directement la définition. Pour la troisième, on étudie la continuité au point $x_0 > 0$ en écrivant pour tout $x > 0$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x_0} = \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}}.$$

On a alors clairement $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$. ◆

☞ **Exemple 3.2.3** La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ caractéristique des nombres rationnels définie par

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \quad f(x) = 0$$

est continue en aucun point. ◆

Soient f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{K})$ et $x_0 \in \mathbb{I}$. Si f et g sont continues en x_0, alors $f+g$ et fg sont aussi continues en x_0. Si en outre $g(x_0) \neq 0$ alors la fonction quotient f/g est continue en x_0.

Théorème 3.2.1 Si les fonctions f et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ alors les fonctions $|f|$, $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont continues.

Preuve : On a pour tout $x \in \mathbb{I}$, $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$, de ceci découle la continuité de $x \to |x|$. D'autre part, on peut écrire

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \quad \text{et} \quad \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|).$$

Des remarques précédentes on en déduit la continuité de $x \to \sup(f(x),g(x))$ et $x \to \inf(f(x),g(x))$. ◆

Ces propriétés entrainent que les fonctions polynômes sont des fonctions continues et que tout fonction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $P,Q \in \mathbb{K}[X]$, est continue en tout point où $Q(x) \neq 0$. Ainsi, toutes les propriétés sur les limites des fonctions sont valables pour les fonctions continues. Si on se donne une suite réelle $(x_n)_n$ qui converge vers un certain x_0 et une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{R})$ continue, alors **(voir exercices)** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

☞ **Exemple 3.2.4** Considérons la fonction

Discontinuité à l'origine

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{si } x \neq 0.$$

A l'origine, considérons une suite de terme général $x_n = 1/n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, qui converge vers 0. Or

$$f(x_n) = \begin{cases} +1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La fonction n'est pas continue en 0 puisqu'elle admet deux limites distinctes. ◆

On rappelle qu'un ensemble $\mathcal{V}$ est **voisinage à gauche** (resp. **voisinage à droite**) d'un point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que l'intervalle $]x_0-\delta, x_0]$ (resp. $[x_0, x_0+\delta[$) soit inclus dans $\mathcal{V}$

La fonction f est dite **continue à gauche** en x_0 si pour $x \leq x_0$ on a

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).}$$

On en déduit que f est continue à gauche en x_0 si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

De même, la fonction f est dite **droite** si pour $x \geq x_0$ on a

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).}$$

On en déduit que f est continue à droite en x_0 si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

On en déduit que la fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à gauche et à droite du point x_0.

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).}$$

Fonction de Heaviside

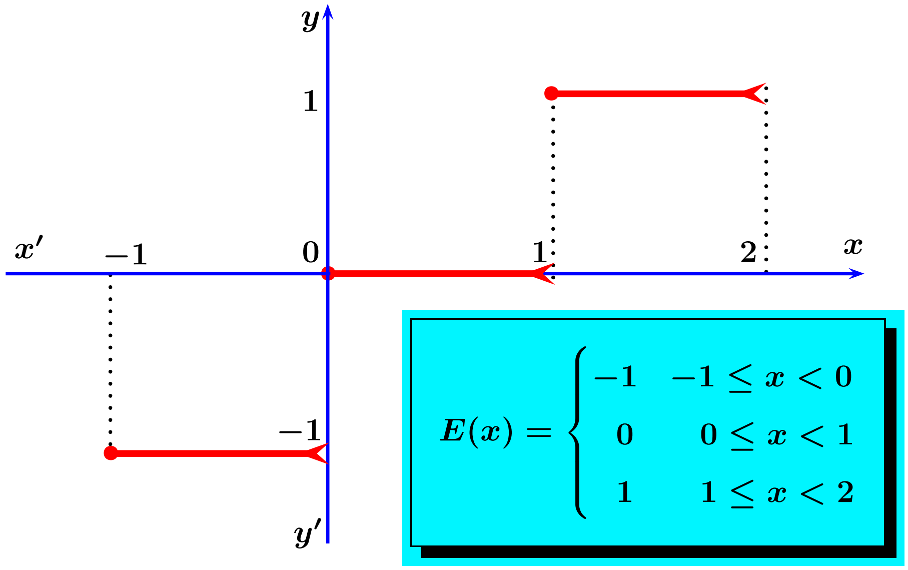
☞ **Exemple 3.2.5** La fonction définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$. Au point $x = 0$, la fonction H est continue à gauche , mais elle ne l'est pas à droite car $\lim_{x \to 0^-} H(x) = H(0) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1 \neq H(0)$. ◆

Fonction Partie Entière

☞ **Exemple 3.2.6** La fonction partie entière E définie pour n entier par $E(x) = n$ si $n \leq x < n+1$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Comme E est une fonction en escalier, elle est continue à droite en tout point entier $x_0 \in \mathbb{Z}$, mais elle ne l'est pas à gauche en ces points.



Par exemple, à l'origine, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} E(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} E(x) = E(0) = 0$. Les limites à gauche et à droite sont différentes, donc la fonction E n'est pas continue à gauche de l'origine. ◆

Définition. *Si la fonction f n'est pas définie au point $x_0 \in \mathbb{I}$ et qu'elle admet en ce point une limite finie notée ℓ, la fonction définie par*

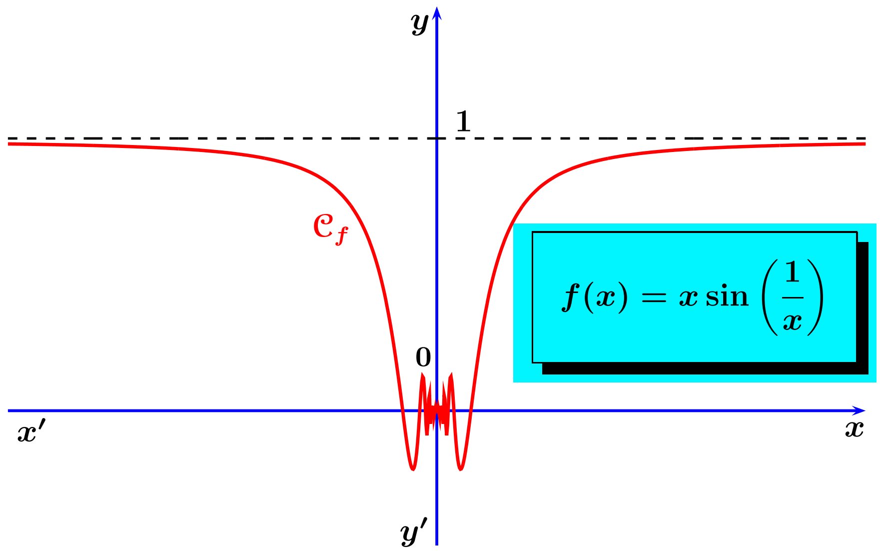
$$\boxed{g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{I} \setminus \{x_0\} \\ \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}}$$

est dite **prolongement par continuité** *de f au point x_0.*

☞ **Exemple 3.2.7** La fonction

$$f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|f(x)| \leq |x|$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.



Le prolongement par continuité de f au point 0 est donc la fonction g définie par :

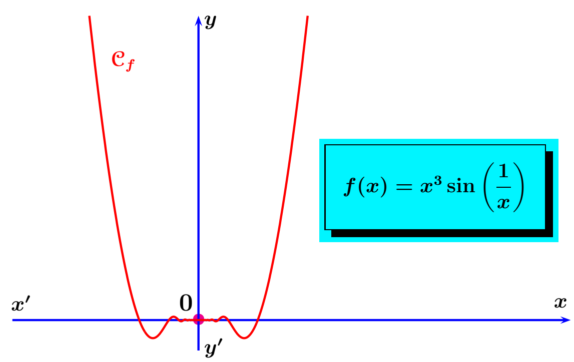
$$g(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Définition. *On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle $\mathbb{I}$ si f est continue en tout point de $\mathbb{I}$.*

☞ **Exemple 3.2.8** La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue sur tout intervalle fermé centré en 0.



Ainsi, si $\mathbb{I} = [a, b]$, la fonction f est continue sur $\mathbb{I}$ signifie qu'elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

Définition. *La fonction $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ est dite* **uniformément continue** *sur l'intervalle $\mathbb{I}$ si*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que : } |x - x'| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon, \forall x, x' \in \mathbb{I}.}$$

Remarquons que le réel η ne dépend pas de x. Ainsi toute fonction uniformément continue sur l'intervalle $\mathbb{I}$ est continue sur $\mathbb{I}$. La réciproque est vraie lorsque l'intervalle $\mathbb{I}$ est fermé.

☞ **Exemple 3.2.9** La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, par contre elle l'est sur tout intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. En effet, pour tous réel $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0|.|x + x_0| \leq (|x| + |x_0|)(|x - x_0||) \\ &\leq 2|b||x - x_0|. \end{aligned}$$

On choisira η indépendamment de x, par exemple $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2|b|}$. ◆

☞ **Exemple 3.2.10** La fonction $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. En effet, considérons les suites $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ et $y_n = n$ On a toujours

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$$

bien que $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{n}$. Aucun nombre η ne peut correspondre à $\varepsilon = 2$.

☞ **Exemple 3.2.11** La fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ est dite **k-lipschitzienne** d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$, si pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{I}$, il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|^\alpha.}$$

Toute fonction k-lipschitziene d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, est uniformément continue, puisque pour ε un réel positif donné, on peut choisir $\eta = \varepsilon/k$ indépendamment de x. ◆

Théorème 3.2.2 [Valeurs intermédiaires]. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$:*

$$\boxed{\forall c \in [f(a), f(b)],\ \exists x_0 \in [a,b]\ :\ f(x_0) = c.}$$

Intuitivement, le graphe de la fonction f ne présente aucune discontinuité entre les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$:

Une variante au théorème des valeurs intermédiaires, qui permet de résoudre certaines équations numériques, est donnée par :

Théorème 3.2.3 *Si la fonction f est continue sur $[a,b]$ et si $f(a).f(b) < 0$, il existe alors au moins un point un $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) = 0$.*

Si f est strictement monotone sur $[a,b]$, le point x_0 est unique.

Dans l'exemple suivant, on cite les diverses méthodes de résolutions d'une équation numérique.

☞ **Exemple 3.2.12** Considérons une fonction monotone et continue sur $[a,b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$. Il existe une solution unique x_0 de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a,b]$. Pour estimer convenablement la racine x_0, plusieurs méthodes de résolution sont suggérées.

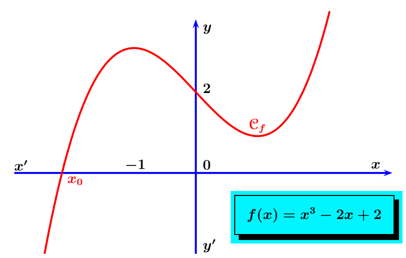
① **Méthode de dichotomie** : On choisit le milieu $\dfrac{a+b}{2}$ de l'intervalle $[a,b]$ et on calcule $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Si $f(a).f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, la racine x_0 est à chercher dans l'intervalle $\left[a, f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\right]$. Sinon $x_0 \in \left[f\left(\dfrac{a+b}{2}\right), b\right]$. L'intervalle où se trouve x_0 sera retenue et on repète la même opération jusqu'à ce que la précision soit suffisante.

② **Méthode du point fixe** : On exprime la fonction f sous la forme $f(x) = \varphi(x) - x$. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ revient à trouver le point fixe x_0 de l'équation $\varphi(x) = x$. Ceci est possible lorsque φ applique l'intervalle $[a,b]$ dans lui-même et s'il existe une certaine constante k telle que $|\varphi'(x)| \le k < 1$ pour tout $x \in [a,b]$. La suite $(x_n)_n$

déterminée par une valeur initiale choisie sur $[a, b]$ et par la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, converge vers la solution de l'équation x_0.

③ **Méthode de Newton-Raphson** : Supposons qu'une valeur approchée x_1 de x_0 soit connue. L'abscisse x_2 de l'intersection de la tangente à la courbe Γ_f au point $M_0(x_1, f(x_1))$, est une nouvelle valeur plus précise de x_0. En répétant ce procédé, on construit une suite $(x_n)_n$ qui converge vers x_0. Les termes de cette suite, comme on peut le constater sont donnés par la récurrence $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. ◆

☞ **Exemple 3.2.13** La fonction $f(x) = x^3 - 2x + 2$ est continue sur l'intervalle $[-2, 1]$. Comme $f(-2).f(1) = -2 < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine sur l'intervalle $[-2, 1]$, à savoir, $x_0 = -1,76929$: La racine x_0 est l'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses. ◆



Proposition 3.2.4 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante), alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. La bijection réciproque f^{-1} est continue et strictement croissante (resp. décroissante).

Preuve : Faisons la démonstration dans le cas où f est strictement croissante quite à remplacer f par $-f$. Comme $x \in [a, b]$ alors $f(x) \in [f(a), f(b)]$ donc

$$f([a, b]) \subset [f(a), f(b)].$$

Mais f prend les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, ainsi $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. L'application f est surjective. De plus est injective. Donc f est une application bijective de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Soient $\alpha, \beta \in [f(a), f(b)]$ tels que $\alpha < \beta$. Posons $x = f^{-1}(\alpha)$ et $y = f^{-1}(\beta)$. On a $\alpha = f(x)$, $\beta = f(y)$. Si $y \leq x$ alors $f(y) \leq f(x)$ c'est-à-dire $\beta \leq \alpha$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $x < y$ c'est-à-dire $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$. Ainsi, l'application f^{-1} est strictement croissante. Montrons maintenant la continuité de f^{-1} en tout point $\gamma_0 \in]f(a), f(b)[$. Posons $x_0 = f^{-1}(\gamma_0)$ donc $\gamma_0 = f(x_0)$ et $a < x_0 < b$. Choisissons η_1 et η_2 de $[a, b]$ equidistants du point x_0 qui sont ε-équidistants Soient $\beta_1 = f(\eta_1)$ et $\beta_2 = f(\eta_2)$. On a $f(a) \leq \beta_1 < \gamma_0 < \beta_2 \leq f(b)$. Si $y \in [\beta_1, \beta_2]$ alors $f^{-1}(y) \in [\eta_1, \eta_2]$. Posons δ un réel positif majoré par les nombres positifs $|\gamma_0 - \beta_1|$ et $|\gamma_0 - \beta_2|$. Alors, on a

$$|y - \gamma_0| \leq \delta \implies \eta_1 < y < \eta_2 \implies |f^{-1}(y) - f^{-1}(\gamma_0)| \leq \varepsilon.$$

D'où la continuité de f^{-1} au point γ_0. La démonstration pour $\gamma_0 = f(a)$ ou $\gamma_0 = f(b)$ se traite de la même façon ou plus simplement. ◆

Cette proposition reste valable dans le cas où l'intervalle de définition est semi-ouvert, ce qui peut se reformuler ainsi :

Proposition 3.2.5 Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, alors f est une bijection de $[a, b[$ sur $[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)[$.

3.3 Fonction dérivable

La dérivée d'une fonction renseigne sur certaines particularités de son graphe. Elles permet d'identifier, entre autres :

① Pour quelles valeurs de son domaine de définition la courbe croît ou décroît ?

② Quels sont les extremums relatifs (locaux) ou absolue (globaux) de la fonction ?

Définition. *Soit $x_0 \in \mathbb{I}$. On dit que f est* **dérivable** au point x_0 si son taux d'accroissement au point x_0

$$\boxed{T_{f,x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

tend vers une limite finie quand x tend vers x_0 et $x \neq x_0$. Cette limite s'appelle la **dérivée** de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

Ainsi, en posant $x = x_0 + h$, $h \neq 0$, on a

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.}$$

On peut encore écrire

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h), \quad \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.}$$

☞ **Exemple 3.3.1** Soit f la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. La dérivée de f en un point $x \in \mathbb{R}$ est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) \\ &= 2x. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

En général, si $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

☞ **Exemple 3.3.2** Soit $f(x) = \sin x$, la dérivée de f au point x est

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h}\sin x + \frac{\sin h}{h}\cos x. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0,$$

on obtient alors $f'(x) = \cos x$. On procède de la même façon pour calculer la dérivée de la fonction $x \to \cos x$. Ainsi

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x \quad \text{et} \quad (\cos x)' = -\sin x. \quad \blacklozenge}$$

Définition. *La fonction qui à tout x de $\mathbb{I}$ associe $f'(x)$ dans $\mathbb{K}$ s'appelle fonction dérivée de f et se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.*

☞ **Exemple 3.3.3** e Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Au point $x = 0$, on a

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

Mais $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ n'admet pas de limite, lorsque $h \to 0$, puisqu'il oscille entre -1 et $+1$. ◆

Notation de Landau :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{I}$. On dit que g est **négligeable** devant f quand x tend vers x_0 si $\lim_{x\to x_0} g(x)f(x) = 0$. On note dans ce cas

$$\boxed{g = 0(f) \quad \text{quand} \quad x \to x_0.}$$

Ainsi, L'écriture $\varepsilon(h) = 0(1)$ quand $h \to 0$ signifie que $\varepsilon(h)$ est négligeable devant 1 c'est à dire que $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Avec cette notation, on peut écrire

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h0(1), \quad h \to 0.}$$

Proposition 3.3.1 Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.

Preuve : Si f est dérivable au point x_0, alors pour tout $h > 0$, il existe $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 avec h tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = h[f'(x_0) + \varepsilon(h)]$. D'où $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.◆

Définition. *La forme linéaire*

$$\boxed{df_{x_0} : h \longrightarrow hf'(x_0)}$$

est dite la **différentielle de f au point x_0**.

Il est évident que pour les petites valeurs de h, $df_{x_0}(h)$ donne une approximation excellente de $f(x_0+h)-f(x_0)$.

☞ **Exemple 3.3.4** Pour illustrer une application facile de cette idée, on va utiliser la différentielle pour donne une valeur approximative de $\sqrt{4,1}$. Pour cela considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et $x_0 = 4$. Donc $f(4,1) - f(4) \simeq f'(4) \times 0,1$. Ainsi $\sqrt{4,1} \simeq \frac{1}{2\sqrt{4}}.0,1 + 2 = 2,025$. La valeur actuelle de $\sqrt{4,1}$ est $2,0248$...◆

Interprétation géométrique :

Soient $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \mathcal{C}_f$ et $M = (x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$. La quantité, dite **taux d'accroissement** de f au voisinage de x_0

$$T_{f,x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

représente la pente de la droite M_0M. Si ce quotient a une position limite quand $x \to x_0$, $x \neq x_0$, la droite M_0M tend vers une limite appelée tangente à $\mathcal{C}_f$ en M_0 et la pente de cette tangente est $f'(x_0)$. L'équation de cette tangente est donc

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)}$$

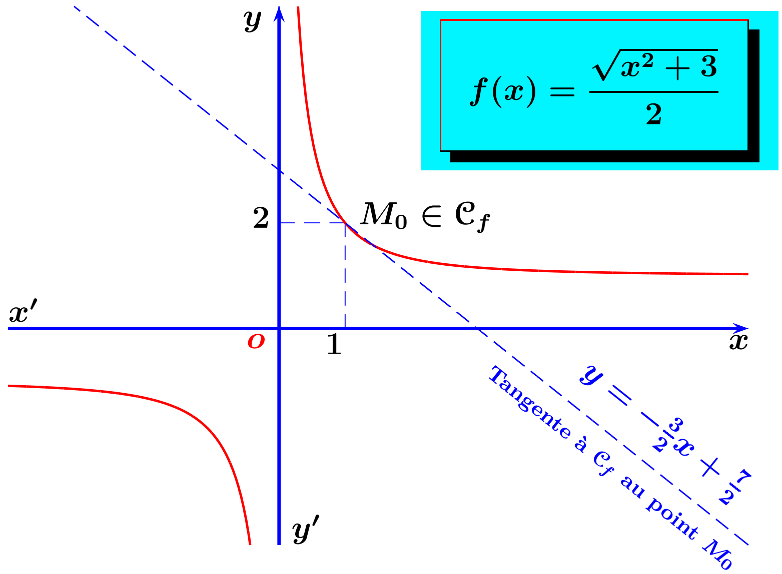
☞ **Exemple 3.3.5** Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}.$$

La pente de la tangente au point $M_0(1,2) \in \mathcal{C}_f$ est

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(1+h)^2+3}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-6-3h}{(1+h)(\sqrt{(1+h)^2+3}+2(1+h))} = -\frac{3}{2}.$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point M_0 est la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$:



3.4 Extension de la notion de dérivée

Si le taux de variations T_{f,x_0} de f au voisinage de x_0 tend vers $\pm\infty$, on dit que f admet une **dérivée infinie** et on note

$$\boxed{f'(x_0) = \pm\infty.}$$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, au point x_0, est dite **tangente verticale**.

☞ **Exemple 3.4.1** La fonction $f : x \to x^3$ definie sur $\mathbb{R}$ est dérivable et bijective. Sa dérivée est cependant nulle en 0. Sa fonction réciproque $f^{-1} : x \to x^{1/3}$ n'est pas dérivable en 0. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point 0 est l'axe des ordonnées donc $(f^{-1})'(0^{\pm}) = \pm\infty$. Le point 0 est un point singulier pour la courbe $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.

☞ **Exemple 3.4.2** Considérons la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f(x) = x^{2/3}$. Au point $M_0 = (0,0) \in \mathcal{C}_f$, on a $f'(0) = \lim_{h\to 0} h^{-1/3} = \pm\infty$. La tangente au point M_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à l'axes des ordonnées. Le point M_0 est dit **point singulier** de la courbe $\mathcal{C}_f$ ◆

Définition. *Pour $x > x_0$, on dit que la fonction f est* **dérivable à droite** *en x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} T_{f,x_0}$ existe et est finie.*

Pour $x < x_0$, on dit que la fonction f est en x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} T_{f,x_0}$ existe et est finie.

On note, dans ces cas :

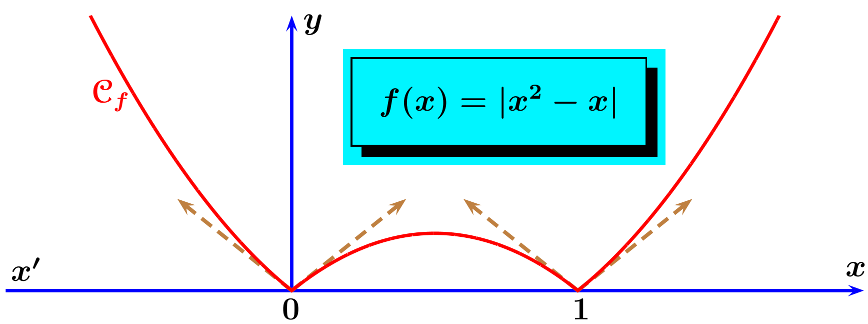
$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La dérivée de f au point x_0 existe si et seulement $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$ existent et sont égales

$$f \text{ est dérivable au point } x_0 \iff f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0)$$

Si les dérivées à gauche et à droite existent et sont différentes, ils existent alors deux demi-tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $(x_0, f(x_0))$ dit **point anguleux** , comme on peut le constater sur le graphe ci-dessous.

☞ **Exemple 3.4.3** Considérons la fonction $f(x) = |x^2 - x|$ qui est définie sur $\mathbb{R}$. Elle admet deux point anguleux, à savoir l'origine $(0,0)$ et le point $(1,0)$. Au point $(0,0)$ on a $f'g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Au point $(1,0)$ on a $f'g(1) = -1$ et $f'_d(1) = 1$:



A l'origine on a deux demi-tangentes, à savoir, $y = x$ et $y = -x$. Au point $(1,0)$, on aussi deux demi-tangentes d'équations : $y = x - 1$ et $y = -x + 1$. ◆

Il est clair que si la fonction f est dérivable en x_0, f est continue en x_0. La réciroque est fausse :

☞ **Exemple 3.4.4** La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ est continue au point 0 par contre elle n'est pas dérivable en ce point car elle admet des dérivées différentes à gauche et à droite $f'_d(0) = +1 \neq f'_g(0) = -1$. ◆

3.5 Opérations de dérivations

Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $x_0 \in \mathbb{I}$. Si les fonctions f et g sont dérivables en x_0, alors

- **Somme** : La fonction somme $f + g$ est dérivable en x_0 et on a

$$\boxed{(f+g)'(x_0) = (f'+g')(x_0).}$$

- **Produit** : La fonction produit fg est dérivable en x_0 et on a

$$\boxed{(fg)'(x_0) = (f'g + fg')(x_0).}$$

- **Quotient** : si $g(x_0) \neq 0$, la fonction fg est dérivable en x_0 et on a

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f'g - fg'}{g^2}\right)(x_0).}$$

  En particulier

$$\boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'}{g^2}(x_0).}$$

- **Dérivée de la composée de deux fonctions** : Soient $\mathbb{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{J}$ et $g : \mathbb{J} \longrightarrow \mathbb{K}$. Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{I}$ et g dérivable en $f(x_0)$, la fonction composée $g \circ f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dérivable en x_0 et

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).}$$

- **Dérivée de la fonctions réciproque :** Soient $\mathbb{J}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{J}$ une bijection continue. L'application réciroque $f^{-1} : \mathbb{J} \longrightarrow \mathbb{I}$ est aussi continue sur $\mathbb{J}$. Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{I}$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ tel que

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.}$$

☞ **Exemple 3.5.1** Soit $g : x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\boxed{(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.}$$

☞ **Exemple 3.5.2** Soit la fonction $f(x) = \mathrm{tg}\, x$. En écrivant $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, on trouve que

$$\boxed{f'(x) = 1 + \mathrm{tg}\,^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

La dérivée f' de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ est une fonction sur l'intervalle $\mathbb{I}$. Si f' est dérivable à son tour, sa dérivée notée $f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$ est dite **dérivée seconde** de f. Cette notion se généralise à l'ordre n. Ainsi la dérivée d'ordre n de f est définie par

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) = \frac{df^{(n-1)}}{dx}(x). \quad \blacklozenge}$$

☞ **Exemple 3.5.3** Soit la fonction $f(x) = \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. Les dérivées d'ordre 1 et 2 sont

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right).$$

Par récurrence la dérivée d'ordre n de f est

$$\boxed{\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).}$$

☞ **Exemple 3.5.4** Considérons la fonction

$$x \longrightarrow f(x) = 2x + 2x^2 + 1 + 2\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

et montrons que $f^{(n-1)}(x) = A_n(x)(x+1)^n$ où A_n est un polynôme de degré n. Pour ce faire, on doit raisonné par récurrence. Pour $n = 1$, on a

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x+1)}{(x^2+1)^2} + 2\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}.\frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2x(1+2x)}{(x^2+1)^2}.$$

Le polynôme $A_2(x) = -2x(1+2x)$ est bien de degré 2. Supposons le résultat établi jusqu'à l'ordre n c'est à dire que $f^{(n-1)}(x) = \dfrac{A_n(x)}{(x^2+1)^n}$ où A_n est un polynôme de degré n, alors $f^{(n)}(x) = A'_n(x)(x^2+1) - 2nxA_n(x)(x^2+1)^{n+1}$. Posons $A_{n+1}(x) = A'_n(x)(x^2+1) - 2nxA_n(x)$. Si le terme de plus haut degré de A_n est a_nx^n, celui de A_{n+1} est $na_nx^{n+1} - 2na_nx^{n+1} = -na_nx^{n+1}$ donc A_{n+1} est effectivement de degré $n+1$. ◆

3.6 Théorèmes de Rolle et des Accroissements finis

Soient $\mathbb{I} =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$. Fixons un point x_0 sur $\mathbb{I}$. On dit que la fonction f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **relatif** au point x_0 s'il existe un intervalle ouvert $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ centré sur x_0 tel que

$$\forall x \in \mathbb{J}, \qquad f(x) \le f(x_0) \;\; (\text{resp. } f(x) \ge f(x_0)).$$

On dit que la fonction f présente au point x_0 un **extremum**, si elle admet un maximum ou un minimum au point x_0

Proposition 3.6.1 *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]a, b[$. Supposons que f présente un au point x_0. Si f est dérivable au point x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Preuve : Supposons que l'extremum en question est un maximum. Il existe alors un intervalle $\mathbb{J} \subset \mathbb{I}$ contenant x_0 tel que le taux d'accroissement au voisinage de x_0 a le signe

$$\begin{cases} T_{f,x_0} \ge 0 & \text{si } x < x_0 \\ T_{f,x_0} \le 0 & \text{si } x > x_0. \end{cases}$$

Comme f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} T_{f,x_0}$. Dans les deux cas, on obtient que $f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$. Donc $f'(x_0) = 0$. ◆

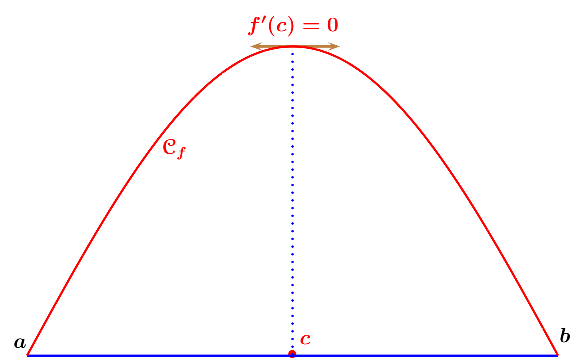
Remarquons tout d'abord qu'une fonction peut admettre un extremum en un point sans qu'elle soit dérivable en ce point, par exemple $f(x) = |x|$ et $x_0 = 0$.

La réciproque de la proposition est fausse comme on peut le constater si l'on considère la fonction $f(x) = x^3$. Au point $x = 0$, on a bien $f'(0) = 0$ et pourtant f ne présente ni un maximum ni un minimum à l'origine.

Les points où la dérivée de f est nulle sont appelés **points critiques**. Il s'agit en fait des points où la fonction f est stationnaire.

Théorème 3.6.2 (Rolle). *Soient $\mathbb{I} = [a, b]$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Il existe alors un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve : Suposons que la fonction f est non nulle sur $\mathbb{I}$, sinon tous les points conviennent. Supposons qu'il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) > 0$. Posons $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) > 0$. Comme f est continue, la valeur M est atteinte par f en un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$. Comme $f(a) = f(b) = 0$, alors $c \in]a, b[$ et f présente un maximum au point c. D'après la proposition précédente on a $f'(c) = 0$. ◆



Supposons que f ne s'annule pas aux points extrèmes a et b. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction auxilliaire

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - f(b) - f(a)b - a(x - a),$$

on obtient la formule des accroissements finis, à savoir :

Théorème 3.6.3 (Accroissements finis). Soient $\mathbb{I} = [a, b]$ et $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe alors un nombre $x_0 \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0).}$$

Preuve : La fonction φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $\varphi(x_0) = 0$. Ce qui donne le résultat. ◆

Ce résultat s'interprète géométriquement. Soit $\mathcal{C}_f$ la graphe de la fonction f d'extrémités les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Il existe au moins un point $M = (x_0, f(x_0))$ où la tangente à $\mathcal{C}_f$ soit parallèle à la corde AB :

☞ **Exemple 3.6.1** Montrons que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, $x > 0$. Posons $f(x) = \sqrt{1+x}$, alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ et $f(0) = 1$. Pout tout $x > 0$, on applique la formule des accroissements finis à l'intervalle $[0, x]$, il existe $x_0 \in]0, x[$ tel que $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_0}} < \frac{1}{2}$. Ce qui donne la résultat. ◆

Le théorème des accroissemnts finis se généralise ainsi :

Théorème 3.6.4 (Accroissements finis généralisés). *Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que $g'(x) \neq 0$ sur cet intervalle et $g(a) \neq g(b)$. Il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème des accroissemnts finis à la fonction

$$\varphi(x) = [f(b) - f(a)]\,[g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)]\,[f(x) - f(a)]\,. \quad ◆$$

Comme conséquence à cette généralisation, on obtient la règle de l'Hôpital qui s'énonce ainsi :

Règle de l'Hôpital. *Supposons que les fonctions f et g sont dérivables sur l'intervalle $]a, b[$ tel que $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$ et que*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad (L \text{ fini où égal à } \pm\infty).$$

Alors on a

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L}$$

dans les cas suivants :

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$. *Indétermination de la forme* $\frac{0}{0}$.
- $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$. *Indétermination de la forme* $\frac{\infty}{\infty}$.
  Le même résultat subsiste lorsque $x \to b^-$. Toutefois b peut-être infini.

☞ **Exemple 3.6.2** L'expression suivante présente une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$, la règle de l'Hôpital nous donne :

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{2x - \pi}{\cos^2 x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{2}{-2\cos x \sin x} = -\infty.$$

Un exemple où l'indétermination est de la forme $\infty\infty$ est donné par

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^x \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Soit $\alpha > 0$. L'expression $x^\alpha \ell n x$ présente au voisinage de 0^+, une indétermination de la forme $-0 \times \infty$. Alors

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ell n x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha}{\ell n x} \overset{[-\frac{\infty}{\infty}]}{=} -\alpha \lim_{x \to 0^+} x^{\alpha+1} = 0. \quad \blacklozenge$$

Les formes d'indétermination suivantes seront étudiées dans les exemples qui suivent :

Forme indéterminée $0.\infty$: Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$. On écrit dans ce cas, le produit $f(x).g(x)$ sous la forme d'un quotient, à savoir $f(x).g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$ ou $\frac{g(x)}{1/f(x)}$.

Forme indéterminée $\infty - \infty$: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$. La différence $f(x) - g(x)$ peut s'exprimer sous la forme $\frac{1/g(x) - 1/f(x)}{1/(f(x).g(x))}$. On se ramène ainsi à la forme indéterminée $0/0$.

Formes indéterminées de la forme 1^∞, ∞^0, 0^0 : On se ramène aux cas précedent en écrivant $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ell n f(x))$.

☞ **Exemple 3.6.3** Soit à calculer $\ell = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x$ qui présente une indétermination de la forme $0.\infty$. On se ramène à la forme $0/0$ en passant au quotient

$$\ell = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x \overset{[0\infty]}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\coth x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin^2 x = -1.$$

✧ **Remarque :** La réciproque de la règle de l'Hôpital est fausse comme on peut le constater si l'on prend

$$g(x) = x \qquad \text{et} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On a bien $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. Par contre, le quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$. Pour cela choisissons une suite (x_n) qui tend vers l'infini telle que $x_n = \frac{1}{n\pi}$. On a alors $\frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = (-1)^{n+1}$ dont la limite est $+1$ ou -1 suivant que n est paire ou impaire. La limite n'est donc pas unique, de plus $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. ◆

3.7 Etude globale de fonctions

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{I}$. On dit que le graphe de f possède une **branche infinie** en $x_0 \in \mathbb{I}$ si x ou $f(x)$ n'est pas borné quand x tend vers x_0.

Si le graphe de f possède une branche infinie en $x_0 \in \mathbb{I}$, et si la droite OM joigant l'origine au point $M(x, f(x))$ a une position limite D quand x tend vers x_0, on dit que D est une **direction asymtotique** du graphe de f en x_0. Par exemple la fonction $x \to x \sin x$ sur $\mathbb{R}$ n'a pas de direction asymtotique en $\pm\infty$, par contre la fonction $x \to \sin x$ admet comme direction asymptotique l'axe des abscisses.

Lorsque le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f s'approche à l'infini de celui d'une droite Δ d'équation, cette dernière est dite **asymptôte** à la courbe $\mathcal{C}_f$. On distingue trois types d'asymptôte :

① Lorsque $\lim_{x\to k} f(x) = \infty$, la droite d'équation $x = k$ est dite **asymptôte verticale** ou que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptôtique parallèle è l'axe des ordonnées.

② Lorsque $\lim_{x\to\infty} f(x) = h$, la droite d'équation $y = h$ est dite **asymptôte horizontale** ou que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une direction asymptôtique parallèle è l'axe des abscisses.

③ Lorsque la fonction f s'écrit sous la forme $f(x) = ax+b+g(x)$ avec $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$. La droite Δ d'équation $y = ax+b$ est dite **asymptôte oblique** à la courbe $\mathcal{C}_f$. Les cœfficients a et b sont donnés par les formules suivantes

$$\boxed{a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax].}$$

Remarquons qu'une courbe admet au maximum deux asymptôtes obliques.

☞ **Exemple 3.7.1** Cherchons les asymptotes à la courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 2}{x^2 - 5x + 6}$. On remarque que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$. La droite d'équation $y = 2$ est une asymptôte horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$. D'autre part, le dénominateur de $f(x)$ s'annule pour $x = -3$ et $x = 2$. Comme $\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$, les droites d'équations $x = 3$ et $x = 2$ sont des asymptôtes verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$. ◆

☞ **Exemple 3.7.2** Cherchons les asymptôtes à la courbe représentative de la fonction $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 1}{x - 6}$ qui est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{6\}$. Le dénominateur de $g(x)$ s'annule pour $x = 6$. Comme $\lim_{x\to 6^\pm} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = 6$ est une asymptôte verticale à la courbe $\mathcal{C}_g$. Par identification, la fonction g s'écrit $g(x) = x + 1 + \dfrac{7}{x-6}$. Donc $\lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - (x + 1)] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{7}{x-6} = \pm\infty$. La droite d'équation $y = x - 6$ est une asymptôte à la courbe $\mathcal{C}_g$. ◆

Le théorème des accroissements finis nous permet d'étudier le sens de variations d'une fonction f sur un intervalle $\mathbb{I}$.

Corollaire 3.7.1 *Pour qu'une fonction f soit constante dans l' intervalle $\mathbb{I}$, il faut et il suffit qu'elle ait une dérivée nulle en tout point de $\mathbb{I}$.*

Preuve : La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, supposons que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{I}$. Soient x_1 et x_0 deux points distincts de cet intervalle. Il existe $\xi \in]x_0, x_1[\subset \mathbb{I}$ tel que $f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)f'(\xi)$. Or $f'(\xi) = 0$ alors $f(x_1) = f(x_0)$ pour tous x_0 et $x_1 \in \mathbb{I}$. ◆

Corollaire 3.7.2 *Pour q'une fonction dérivable f soit croissante (resp. décroissante) dans un intervalle $\mathbb{I}$, il faut et il suffit que $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) en tout point x de $\mathbb{I}$.*

Preuve : Supposons que la fonction f est croissante et soit $x_0 \in \mathbb{I}$. Pour tout x distinct de x_0, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ donc $f'(x_0) \geq 0$. Supposons que la dérivée de f est positive dans l'intervalle $\mathbb{I}$. Soient x_0 et x_1 deux points de l'intervalle $\mathbb{I}$ avec $x_0 \leq x_1$, alors $f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)f'(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{I}$. Donc $f(x_1) \geq f(x_0)$ et f est croissante sur $\mathbb{I}$. ◆

Corollaire 3.7.3 *Soit f une fonction dérivable dans l'intervalle $\mathbb{I}$. Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in \mathbb{I}$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) dans $\mathbb{I}$.*

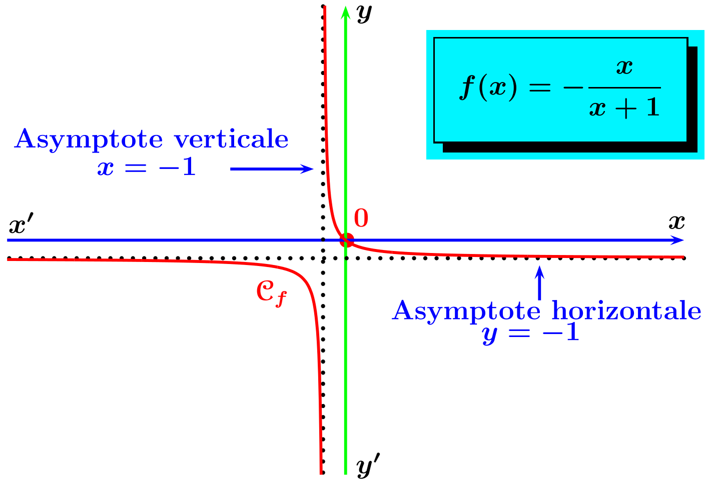
Preuve : Supposons que la fonction f est croissante. Soit $x_0 \in \mathbb{I}$. Pour tout x distinct de x_0, on a $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ donc $f'(x_0) > 0$. Supposons que la dérivée de f est positive dans l'intervalle $\mathbb{I}$. Soient' x_0 et x_1 deux points de l'intervalle $\mathbb{I}$ avec $x_0 \leq x_1$, alors $f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0)f'(\xi) \geq 0$, $\xi \in \mathbb{I}$. Donc $f(x_1) \geq f(x_0)$. ◆

La réciproque de ce corollaire est fausse. La fontion $x \to x^3$ est strictement croissante dans $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule au point $x = 0$.

☞ **Exemple 3.7.3** Soit la fonction $f(x) = -\frac{x}{x+1}$. Elle est définie, continue est strictement décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ car $f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$. Ci-contre, Le tableau de variation de cette fonction.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	-1

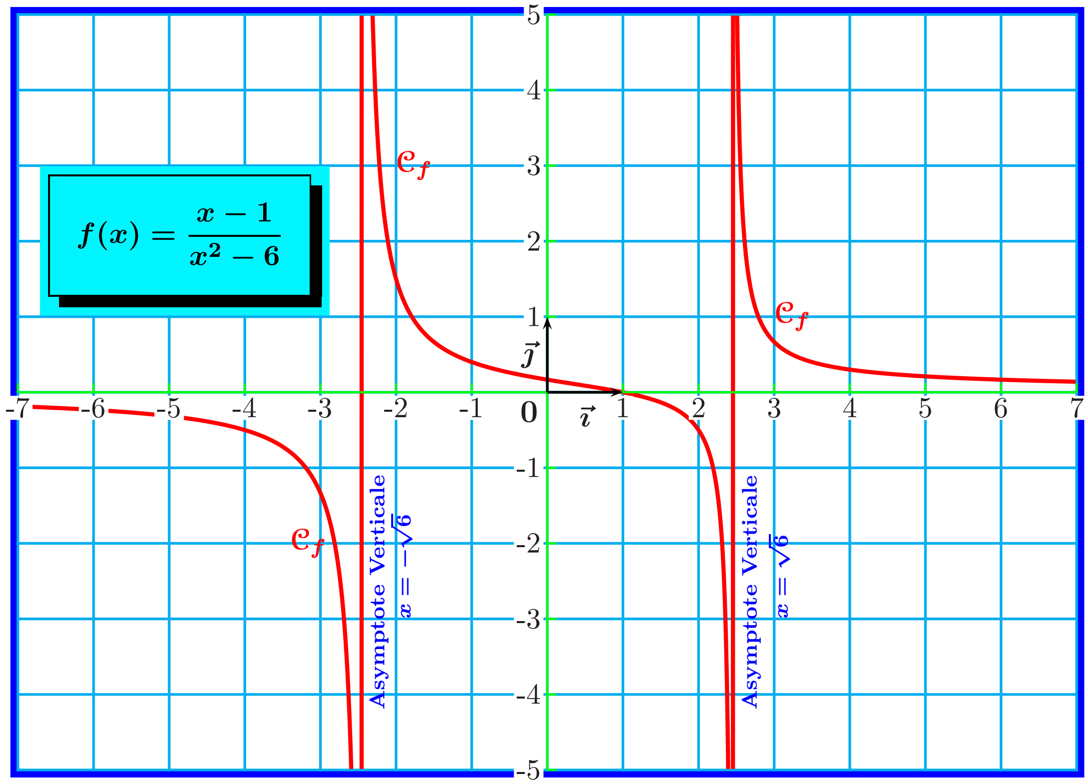
Mais $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -1$. De même $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale $x = -1$ et une asymptote horizontale $y = -1$. Son centre de symétrie est $(-1,-1)$. Elle coupe les axes des coordonnées à l'origine $(0,0)$. ◆



☞ **Exemple 3.7.4** Considérons la fonction $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-6}$. Son domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$. Sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{-x^2+2x-6}{(x^2-6)^2}$ qui est du signe du numérateur $-x^2+2x-6$. Mais le descriminant de ce dernier est $\Delta = -20 < 0$, donc son signe est celui du coefficient de $-x^2$. Ainsi, $f'(x) < 0$ et la fonction est décroissante sur son domaine de défintion. De plus, on a $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$. Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

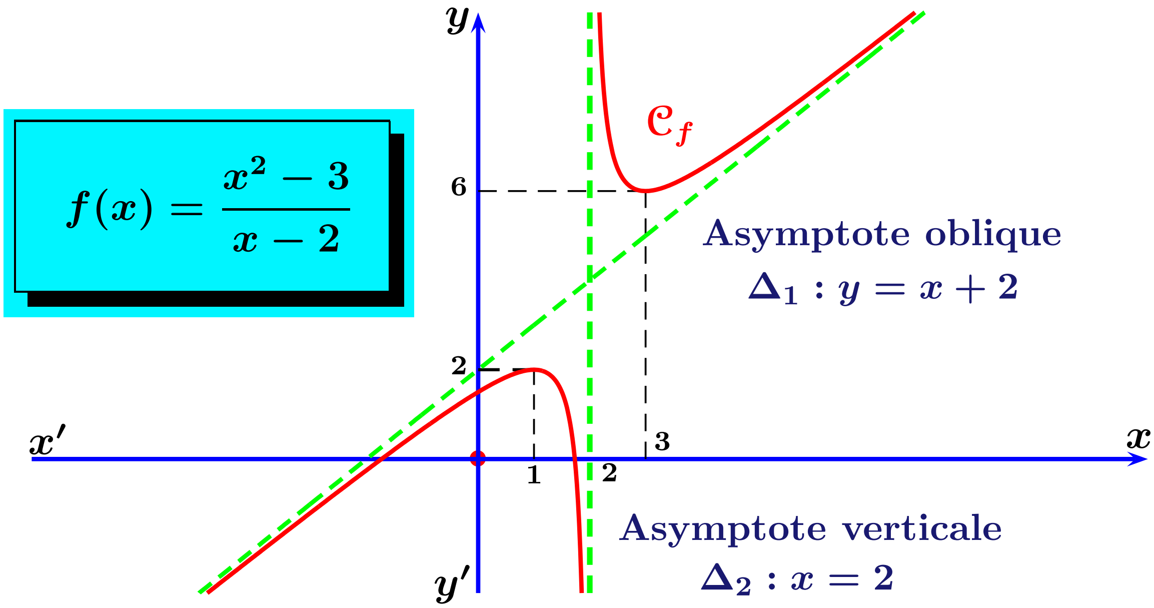
Comme $\lim_{x\to(-\sqrt{6})^\pm} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to(\sqrt{6})^\pm} f(x) = \pm\infty$, les droites $x = -\sqrt{6}$ et $x = \sqrt{6}$ sont des asymptotes verticales à la courbe $\mathcal{C}_f$. De plus, il n'a pas d'asymptote oblique car le degrè du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. La courbe coupe l'axe des y au point $(0, \dfrac{1}{6})$ qui est un centre de symétrie :



☞ **Exemple 3.7.5** Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$. Son domaine de définition est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et sa dérivée $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ s'annule en $x = 1$ et $x = 2$. Donc, la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]1, 2[\cup]2, 3[$. La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un minimum local au point $(3, 6)$ et un maximum local au point $(1, 2)$. De plus $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$. Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe $\mathcal{C}_f$ prend l'allure suivante



On remarque que $f(x) = x+2+\dfrac{1}{x-2}$ et alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-2} = 0$. La droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $x = 2$ est une asymptôte verticale. ◆

3.8 Etude des fonctions usuelles

Toute application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ strictement croissante ou strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{I}$ est injective. Dans ce cas, la fonction f serait une bijection de $\mathbb{I}$ sur son image $f(\mathbb{I})$ dans $\mathbb{K}$.

3.8.1 Fonctions $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \cos x$

Les applications $x \longrightarrow \sin x$ et $x \longrightarrow \cos x$ sont définies et indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Elles vérifient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \qquad |\cos x| \leq 1 \quad \text{et} \quad |\sin x| \leq 1.}$$

D'autre part, si $a, b \in \mathbb{R}$ vérifient $a^2 + b^2 = 1$, il existe alors $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que $a = \cos\varphi$ et $b = \varphi$. De plus, elles sont 2π-périodique.

$$\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x).}$$

La fonction $x \longrightarrow \sin x$ est impaire par contre $x \longrightarrow \cos x$ est paire :

$$\boxed{\cos(-x) = \cos x \quad \text{et} \quad \sin(-x) = -\sin x.}$$

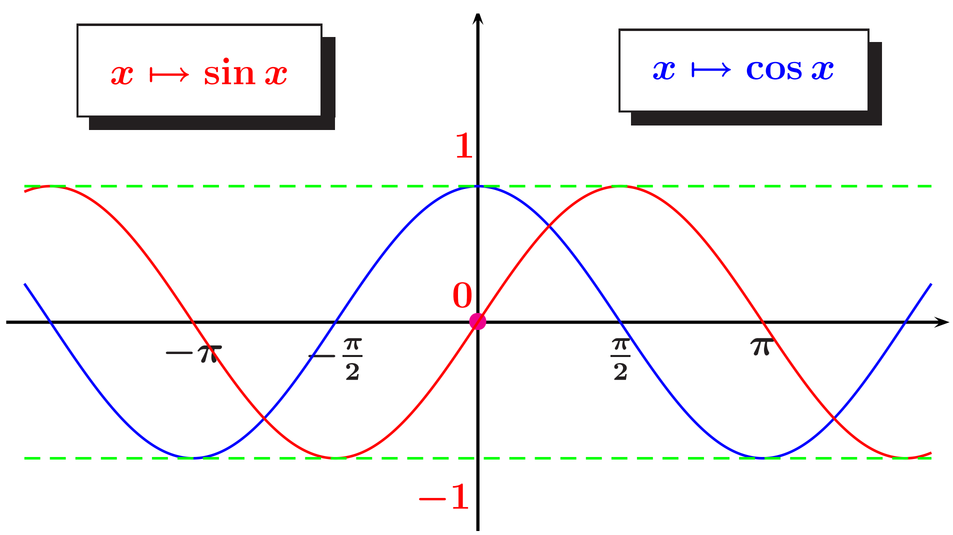
Leurs dérivées premières sont :

$$\boxed{\sin' x = \cos x \quad \text{et} \quad \cos' x = -\sin x.}$$

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, Les dérivées successives des deux applications sont :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \sin^{(n)} x & = & \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \cos^{(n)} x & = & \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right). \end{array}}$$

Comme, $x \cos x$ est une fonction paire donc l'axe des ordonées est un axe de symétrie. De même, la fonction $x \longrightarrow \sin x$ est impaire, le point $(0, 0)$ est un centre de symétrie. Les courbes représentatives des deux applications sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, d'amplitude 2π ont pour allures :



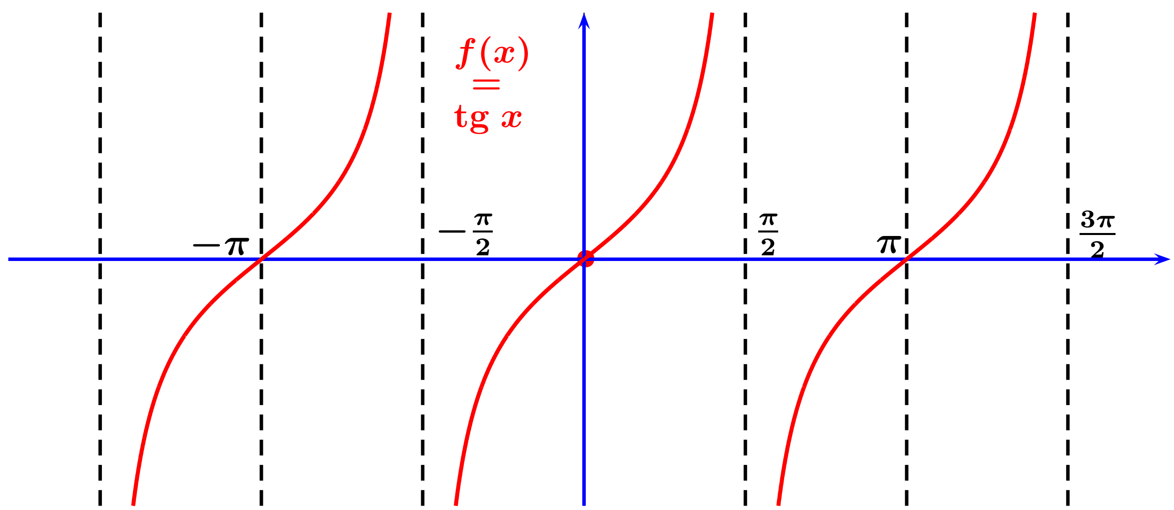
Enfin, on a les égalités utiles suivantes :

$$\boxed{\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x \qquad \text{et} \qquad \sin(2x) = 2\sin x \cos x.}$$

3.8.2 Fonction $x \to \operatorname{tg} x$

L'application $x \to \ \mathbf{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ x : x \neq \dfrac{\pi}{2} \mod. \pi \right\}$:

La courbe représentative de $x \to \operatorname{tg} x$, qui est une fonction impaire, admet $(0, 0)$ comme point de symétrie et a pour allure :



Sur son domaine de définition sa dérivéee est

$$\boxed{\operatorname{tg}' x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.}$$

De plus, la tangente d'une somme ou d'une différence s'expriment sous la forme :

$$\boxed{\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}, \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg}(x-y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.}$$

En particulier,

$$\boxed{\mathbf{tg}\,(2x) = \frac{2\mathbf{tg}\,x}{1 - \mathbf{tg}^{\,2}x}.}$$

En posant $t = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$, on peut exprimer les trois applications précédentes sous la forme :

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

3.8.3 Fonction $x \longrightarrow \arcsin x$

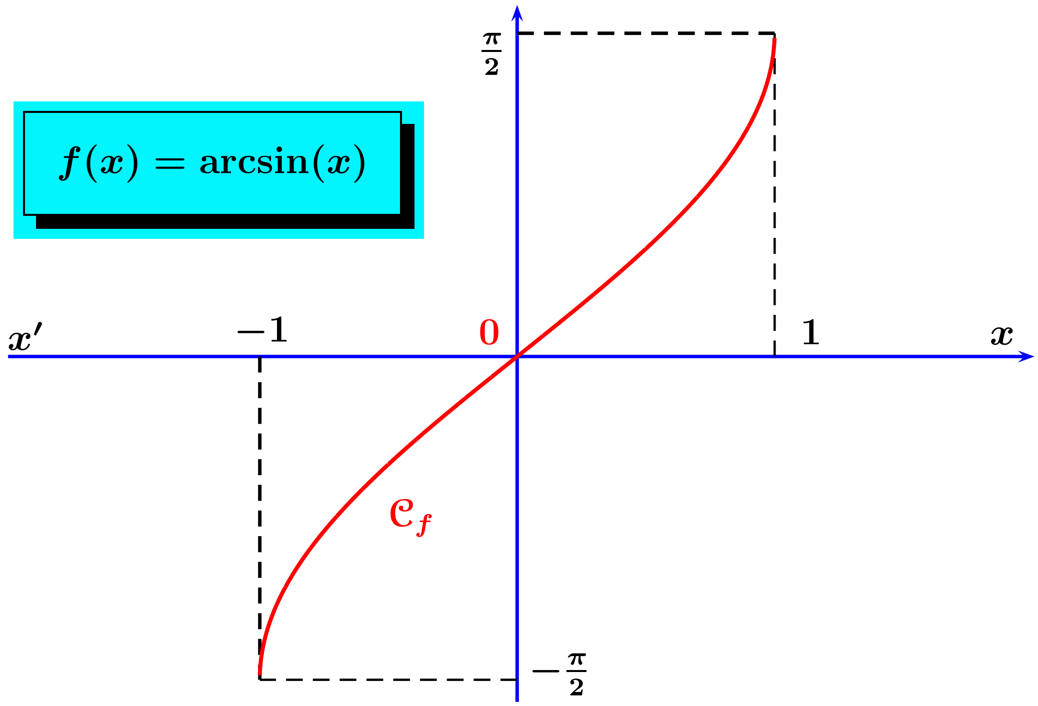
L'application $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \sin x \in [-1,+1]$ est continue et strictement croissante donc bijective. La fonction $x \longrightarrow \arcsin x$ est définie sur $[-1,+1]$ comme fonction réciproque de la fonction sinus $f : x \in [-1,+1] \longrightarrow \arcsin x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, pour tout $x \in [-1,+1]$, le nombre $y = \arcsin x$ est l'unique réel tel que $\sin y = x$ et $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a alors l'équivalence

$$\boxed{y = \arcsin x \iff \begin{cases} x = \sin y \\ \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

D'autre part, la fonction $x \longrightarrow \arcsin x$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. En effet, posons $f(x) = \arcsin x$ donc $f^{-1}(x) = \sin x$. Comme $(f^{-1})'(x) = \cos x$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ qui a un sens car $|\arcsin x| < \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \quad |x| < 1.}$$

La fonction $x \longrightarrow \arcsin x$ est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]-1,1[$. L'allure de la courbe représentative de f est donnée par



☞ **Exemple 3.8.1** Donnons-en une simplification de l'expression tg $(\arcsin x)$. Si l'on pose $t = \arcsin x$, alors $x = \sin t$ car $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Mais sur cet intervalle on a $\cos t \geq 0$ et donc $\cos t = \sqrt{1-x^2}$. Ainsi tg $(\arcsin x) = \text{tg } t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$ ◆

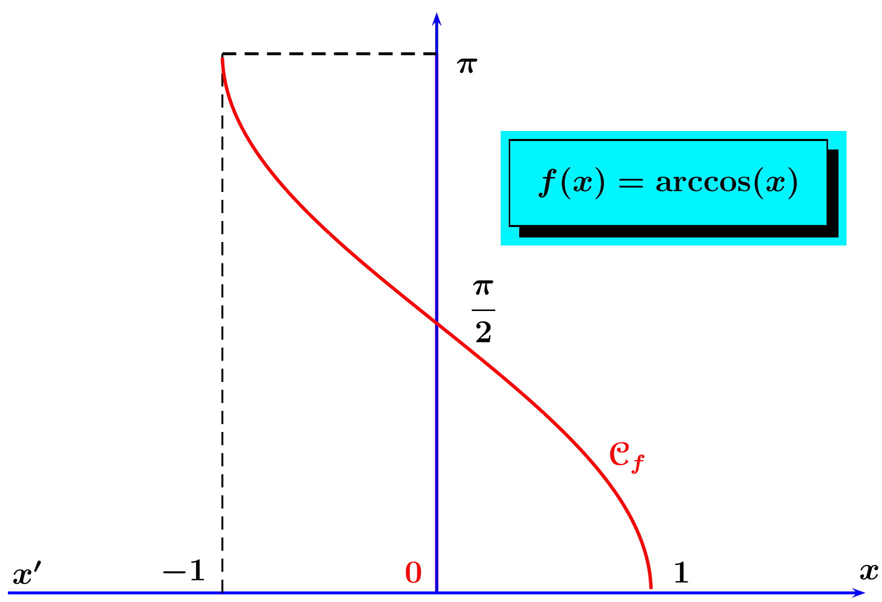
☞ **Exemple 3.8.2** Cherchons l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f(x) = \arcsin \dfrac{x}{2}$ au point $x_0 = -1$. Puisque $f(-1) = \arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$. La pente de la tangente en ce point est $\arcsin\left(\dfrac{x}{2}\right)\Big|_{x=-1} = \left(1 - \dfrac{x^2}{4}\right)^{-1/2}\Bigg|_{x=-1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. La tangente au point $x_0 = -1$ a pour équation $y = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)(x+1) - \dfrac{\pi}{6}$. ◆

3.8.4 Fonction $x \longrightarrow \arccos x$

L'application $x \in [0, \pi] \longrightarrow \cos x \in [-1, +1]$ est continue strictement décroissante donc bijective. Son application réciproque, notée $f : x \in [-1, +1] \longrightarrow \arccos x \in [0, \pi]$ vérifie

$$y = \arccos x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = \cos y \\ 0 \leq y \leq \pi. \end{cases}$$

Son graphe prend l'allure



On montre de la même façon que précédemment

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Donc $x \longrightarrow \arccos x$ est une fonction strictement décroissante sur l'intervalle $]-1, 1[$.

☞ **Exemple 3.8.3** Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $|\arcsin x| \leq \frac{\pi}{2}$. Les arcs $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$ et $\arccos x$ sont compris entre 0 et π et ont le même cosinus. Comme la fonction cosinus est injective sur l'intervalle $[0, \pi]$, les arcs sont égaux et alors

$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.}$$

☞ **Exemple 3.8.4** Montrons que

$$\boxed{\arccos x > \sqrt{1-x^2}, \qquad x \in]-1, 1[.}$$

Pour cela, considérons la fonction $y = f(x) = \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ qui admet sur $]-1, 1[$ la dérivée $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$ si $x \in]-1, 1[$. La fonction est décroissante donc pour tout $x \in]-1, 1[$ on a $f(x) > f(1) = 0$. C'est le résultat cherché. ◆

3.8.5 Fonction $x \longrightarrow \arctan x$

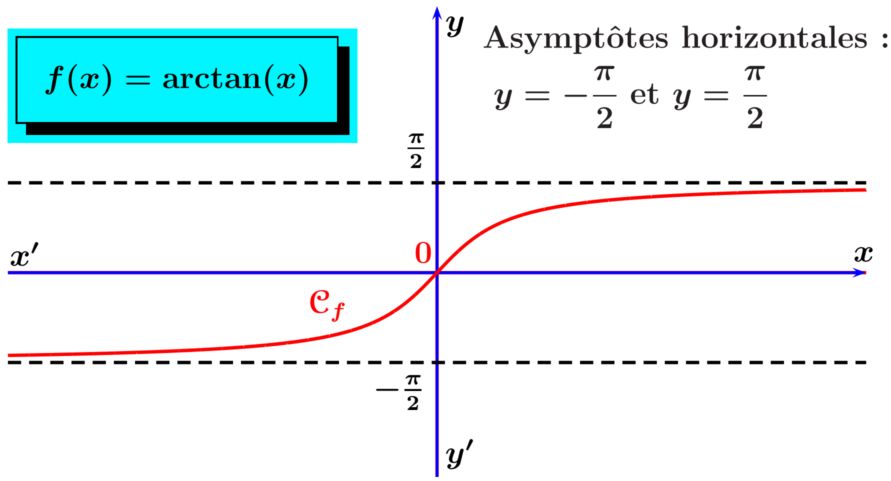
L'application $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \operatorname{tg} x \in]-\infty, +\infty[$ est continue et strictement croissante donc bijective. Sa bijection réciproque, notée $f : x \in]-\infty, +\infty[\to \arctan x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, est continue et strictement décroissante, car $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ donc

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Ainsi on a l'équivalence suivante

$$\boxed{y = \arctan x \iff \begin{cases} x = \operatorname{tg} y \\ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}}$$

L'allure de la courbe réprésentative de $y = f(x) = \arctan x$ et son tableau de variation sont donnés par



Les doites d'équations $y = \dfrac{\pi}{2}$ et $y = -\dfrac{\pi}{2}$ sont des asymptôtes horizontales à la courbe $\mathcal{C}_f$.

☞ **Exemple 3.8.5** On vérifie de la même façon que

$$\boxed{\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}}$$

☞ **Exemple 3.8.6** Montrons que

$$\arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{\pi}{4} + \arctan x, \quad x > -1.$$

Soit $f(x) = \arctan \dfrac{x-1}{x+1} - \arctan x$. Sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ on a $f'(x) = 0$ donc f est une constante sur cet intervalle qui est égale

$$f(0) = \arctan(-1) - \arctan 0 = -\frac{\pi}{4}.$$

Donc $f(x) = -\dfrac{\pi}{4}$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$. ◆

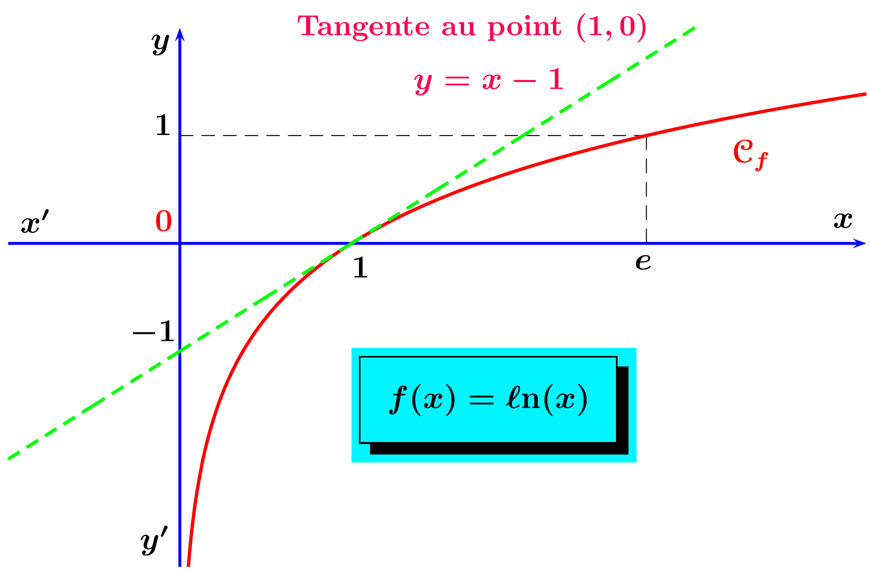
3.8.6 Etude des fonctions logarithmes $x \longrightarrow \ell n(x)$

Transformé des produits en somme, des puissances en produits c'est la tache remarquable d'une (et une seule) fonction qui sera On définie, non par une définition directe, mais à partir de sa dérivée. L'intérêt d'une telle fonction n'est pas des moindres puisque, parfois, on rencontre des graphes dont l'axe des ordonnées et du type $\ln f(x)$.

Définition. *La fonction $f : x \longrightarrow \ell n(x)$ appelée* ***logarithme népérien de x*** est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\boxed{(\ell n x)' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ell n(1) = 0.}$$

Sa courbe représentative prend l'allure suivante



Ceci est déduit de son tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f'(x) = 1/x$	$\|\|$	$+$	
$f(x) = \ell n(x)$	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

La fonction ℓn réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.De plus, L'application $x \longrightarrow \ell n(x)$ est **concave** car sa dérivée seconde est négative $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ et on a, pour $x > 0$:

$$\boxed{\ell n(x) \leq x - 1.}$$

Proposition 3.8.1 La fonction $x \to \ell n(x)$ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $(\mathbb{R}_+, .)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$. Donc

$$\boxed{\ell n(xy) = \ell n(x) + \ell n(y), \quad x, y \in \mathbb{R}_+.}$$

Preuve : Considérons la fonction $F(x) = \ell n(xy)$ qui vérifie $F(1) = \ell n y$. Sa dérivée par rapport à x est égale à

$$F'(x) = [\ell n(xy)]' = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}.$$

La fonction F et la fonction $\ell n(x)$ ont la même dérivée, leur différence est alors une constante, à savoir $\ell n(xy) = \ell n(x) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, $F(1) = \ell n(y) = \ell n(1) + \lambda = \lambda$. D'où le résultat énnoncé. ◆

En posant $y = \dfrac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, on obtient

$$\boxed{\ell n\left(\frac{1}{x}\right) = -\ell n(x), \quad x > 0.}$$

Comme $\frac{x}{y} = x.\frac{1}{y}$, alors

$$\boxed{\ell n\left(\frac{x}{y}\right) = \ell n(x) - \ell n(y), \quad x, y > 0.}$$

Enfin, pour $r \in \mathbb{Q}$, on a

$$\boxed{\ell n(x^r) = r\ell n(x), \quad x > 0.}$$

D'après la courbe représentative de la fonction logarithme, il existe une seule valeur telle $\ell n(x) = 1$, qu'on notera e. Donc

$$\boxed{\ell n(e) = 1 \quad \text{et} \quad e \simeq 2,718.}$$

Si u est une fonction dérivable et $u(x) \neq 0$ pour tout x, alors

$$\boxed{(\ell n|u|)' = \frac{u'}{u}.}$$

C'est **la dérivée logarithmique de u**.

☞ **Exemple 3.8.7** Considérons aa fonction $f(x) = \ell n\left(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}\right)$, $x > a$, $x > b$. Posons $u = \sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}$, la dérivée de f est alors

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{(x-a)(x-b)}(\sqrt{x-a} + (\sqrt{x-b})}.$$

☞ **Exemple 3.8.8** Considérons la fonction $f(x) = \ell n\left|\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right|$, $x > 0$, $x \neq 1$, sécrit $f(x) = \ell n|u|$ avec $u = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ et $u' = \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)^2}$, ce qui donne

$$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}.$$

En générale, soient $u_1, u_2, \cdots, u_n$ des applications dérivables et strictement positives sur un intervlle $\mathbb{I}$ et $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ des réels. Posons $f = u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}, \cdots, u_n^{\alpha_n}$. La dérivée logarithmique de f est

$$\boxed{\frac{f'}{f} = \alpha_1 \frac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \frac{f_2'}{f_2} + \cdots \alpha_n \frac{f_n'}{f_n}.}$$

La dérivée logarithmique est un moyen adéquat pour calculer la dérivée d'une application qui s'exprime essentiellement à l'aide de quotients, de produits et de puissances.

Proposition 3.8.2 On a les limites utiles suivantes,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ell n(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \ell n(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n(x)}{x} = 0^+.}$$

Preuve : Dans la première limite puisque x tend vers $+\infty$, on peut utilise l'artifice suivant : Lorsque x tend vers l'infini on peut écrire $x > 2^n$ pour un certain entier n. Donc $\ell n(x) > n\ell n(2)$ qui tend vers l'infini avec n puisque $\ell n(2) \simeq 0,6931 > 0$. La deuxième limite est une conséquence de la première en faisant un changement de variable $X = \frac{1}{x}$. Pour la dernière limite, on remarque que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$, $f(x) = \ell n(x)$, admet au point $x = 1$ une tangente d'équation $y = x - 1$ et que cette tangente se trouve au dessus de la courbe. Donc $\ell n(x) < x - 1$ pour tout $x > 0$. De même, on a $\ell n(\sqrt{x}) < \sqrt{x} - 1$ pour tout $x > 0$. Ainsi $\ell n(x) = 2\ell n(\sqrt{x}) \leq 2(\sqrt{x} - 1) \leq 2\sqrt{x}$, d'où $\frac{\ell n(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n(x)}{x} = 0$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des abscisses. ◆

☞ **Exemple 3.8.9** Calculons la limite suivante $\ell = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ell n(x)} \right)$. En posant $x = 1$, on obtient la forme indéterminée $\infty - \infty$. Or,

$$\begin{aligned} \ell = \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ell n(x)} \right) &= \lim_{x \to 1} \frac{-x + 1 + \ell n(x)}{(x-1)\ell n(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-1 + 1/x}{(-1 + \ell n(x) - 1/x)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{-1/x^2}{(1/x + 1/x^2)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$ ◆

Au voisinage de $+\infty$, certaines fonctions tendent vers l'infini mais pas avec la même rapidité. Ainsi, on peut comparer la fonction $\ell n(x)$ avec les fonctions puissances. Plus précisément, si $\alpha > 0$, on a

$$\boxed{\ell n(x) = 0(x^\alpha), \quad x \longrightarrow +\infty.}$$

En effet, lorsque x tend vers $+\infty$ on a x^α qui tend vers $+\infty$ et alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \lim_{x^\alpha \to +\infty} \frac{\ell n(x)^\alpha}{x^\alpha} = 0.$$

On dit dans ce cas que les puissances l'emportent sur le logarithme. On a, de plus les limites usuelles suivantes

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ell n(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{\ell n(x)}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \to 0^+} x \ell n(x) = 0^-.}$$

La deuxième limite est une conséquence de la première qui découle, elle aussi, de la définition de la dérivée de la fonction $\ell n x$ au point 1, qui est égale à 1. De plus, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x^\alpha |\ell n(x)|^\beta = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ell n^\beta(x)}{x^\alpha} = 0.}$$

☞ **Exemple 3.8.10** Lorsque $x \longrightarrow 0$, alors les expressions suivantes : $x^2 \ell n(x)$, $\sqrt{x} \ell n(x)$ et $x \ell n^2(x)$ tendent vers 0. ◆

3.8.7 Etude des fonctions exponentielle $x \longrightarrow \exp(x)$

L'application réciproque de la fonction $\ell n(x)$ est continue, strictement croissante. On l'appelle fonction **exponentielle** et on la note $x \longrightarrow e^x$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs sur $]0, +\infty[$.

On a, par ailleurs

$$\boxed{e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{et} \quad (e^x)' = e^x > 0.}$$

Ainsi, on a l'équivalence

$$\boxed{y = e^x \iff x = \ell n(y).}$$

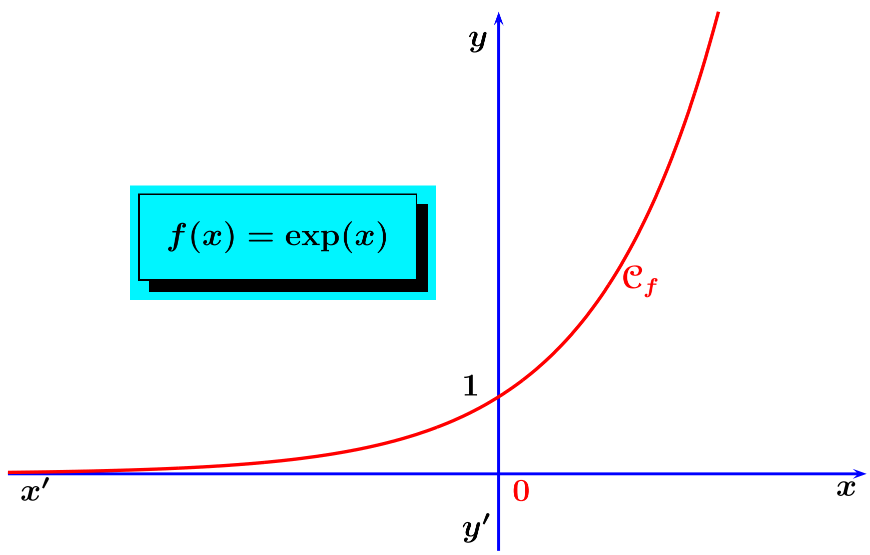
Sur le graphe de la fonction $x \to e^x$, on voit bien que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.}$$

Comme e^x tend vers $+\infty$ avec x alors $\dfrac{\ell n(e^x)}{e^x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Donc, La courbe de $f : x \to \exp(x)$ admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées dont l'allure est



☞ **Exemple 3.8.11** La fonction $f(x) = xe^{x^2}$ admet pour dérivée $f'(x) = e^{x^2} + x.2xe^{x^2} = e^{x^2}(1+2x)$. De même, la fonction $g(x) = \dfrac{x}{(e^x+1)^2}$ admet pour dérivée

$$f'(x) = \frac{1.(e^x+1)^2 + 2(e^x+1).x}{[(e^x+1)^2]^2} = \frac{e^x+2x+1}{(e^x+1)^3}.$$

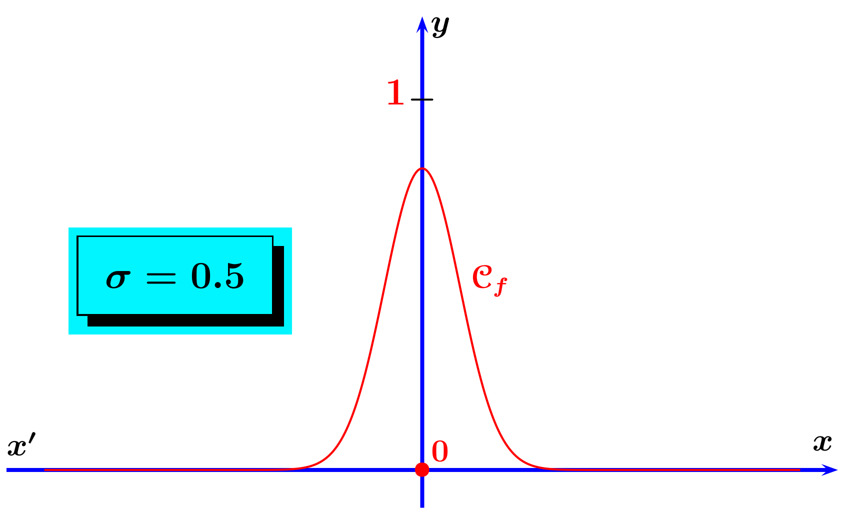
☞ **Exemple 3.8.12** En probabilité, on a affaire avec la **densité de probabilité** de la loi normale donnée par :

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Les constantes μ et σ sont dites **moyenne** et **variance** de la loi. Par un changement de variable $x = \dfrac{t-\mu}{\sigma}$, on se ramène à la densité de probabilité de la **loi normale centrée**

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).}$$

Sa dérivée est $f'(x) = -\dfrac{1}{\sigma^2} x f(x)$. Elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ et strictment décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et admet un maximum pour $x = 0$. L'allure de sa courbe représentative $(\sigma = 0.5)$ est :



De plus, elle est positive, paire et continue. ◆

☞ **Exemple 3.8.13** Soit $f : x \mapsto \sqrt{|x(x-2)|} \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. La dérivée de $\ell n f(x)$ s'écrit

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)}, \qquad \text{donc} \qquad f'(x) = \frac{x^2-2}{x^2(x+2)} f(x).$$

La dérivée seconde de f sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ a pour expression

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{x^2 - 2}{x^2(x+2)} f'(x) + \frac{-x^4 + 6x^2 + 8x}{x^4(x+2)^2} f(x) \\ &= \frac{2(x^2 + 4x + 2)}{x^4(x+2)^2} f(x). \end{aligned}$$

La comparaison de ce calcul avec celui de la méthode directe de dérivation, renseigne sur l'utilité de la dérivée logarithmique puisque la présence de la valeur absolue n'arrange les choses dans le cas du calcul directe. ◆

☞ **Exemple 3.8.14** Les fonctions suivantes $f(x) = \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$ et $g(x) = (\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ (2x)}$ présentent respectivemet, lorsque x tend vers ∞ et $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^-$, les formes indéterminées 1^∞ et ∞^0. Pour cela, On exprime ces fonctions en terme du logarithme et de l'exponentielle, on trouve $f(x) = \exp\left[x \ell\mathrm{n}\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)\right]$ et $g(x) = \exp\left[\mathrm{tg}\ (2x) \ell\mathrm{ntg}\ (x)\right]$. Enfin, on se ramène aux cas précédents : $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x = \exp(a)$ et $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-} (\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ (2x)} = 1$. ◆

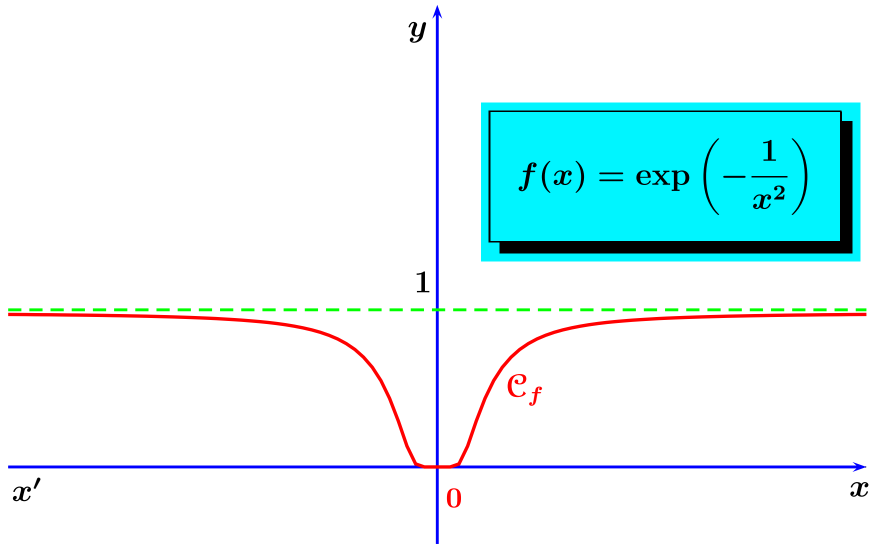
☞ **Exemple 3.8.15** Etudions les variations de la fonction suivante et traçons son graphe

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Cette fonction est définie, continue et dérivable $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C'est une fonction paire, il suffit de l'étudier sur $[0, +\infty[$. Sa dérivée sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est $f'(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$. Cette dérivée est positive si $x \in]0, +\infty[$. La droite $y = 1$ est une asymptôte horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ car lorsque $x \to \pm\infty$, $1/x^2$ tend vers 0 et $f(x)$ tend vers 1^-. Le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle$]0, +\infty[$ est

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$	1^-	$\searrow$	0^+	$\nearrow$	1^-

Sa Courbe représentative $\mathcal{C}_f$ prend l'allure suivante



La fonction f admet comme prolongement par continuité au point 0, la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

☞ **Exemple 3.8.16** Etudions les variations de la fonction suivante et traçons son graphe

$$f(x) = (2x^2 - 3x)e^{-x+1}$$

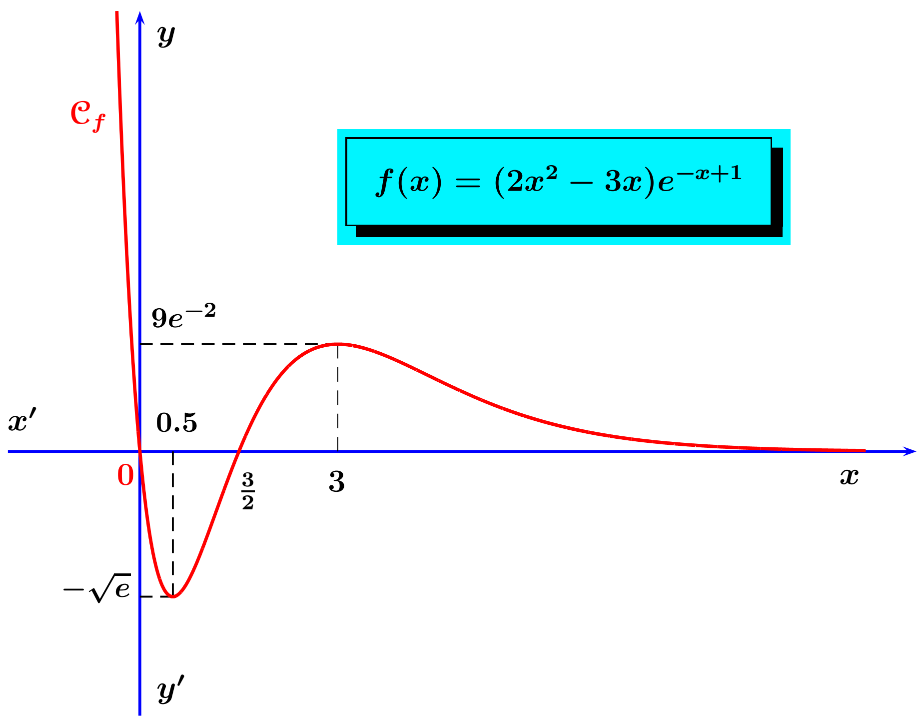
Cette fonction est définie, continue et dérivable $\mathbb{R}$. Sa dérivée sur $\mathbb{R}$ est $f'(x) = (-2x^2 + 7x - 3)e^{-x+1}$ et a le même signe que celui de $-2x^2 + 7x - 3$ qui s'annule pour $x = 1/2$ et $x = 3/2$. La limite de f à $-\infty$ est $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2 - 3x) \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$. D'autre part, la fonction f présente une indétermination de la forme $+\infty \times 0$ à $+\infty$. Pour trouver la limite de f à $+\infty$, effectuons le changment de variable $x = 2t$ pour obtenir :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{t}{e^t}\right)^2 \left(8 - \frac{6}{t}\right) = \left(\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t}\right)^2 . \lim_{t\to+\infty} \left(8 - \frac{6}{t}\right) = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisse comme asymptôte horizontale et l'axe des ordonnées comme direction asymptôtique. Le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\sqrt{e}$	$\nearrow$	$9e^{-2}$	$\searrow$	0

Sa Courbe représentative $\mathcal{C}_f$ prend l'allure suivante



La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un minimum global, le point $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{e}\right)$ et comme maximum local le point $(3, 9e^{-2})$. Elle passe par l'origine et coupe l'axe des abscisses au point $(3, 0)$. ◆

3.8.8 Généralisation de l'exponentielle $x \longrightarrow \exp_a x$:

Soit $a > 0$, on appelle exponenielle de base a, la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \quad \exp_a(x) = e^{x\ell n(a)}}$$

Elle vérifie :

① $\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y)$.

② $\exp_a(0) = 1, \quad \exp_a(1) = a, \quad \exp_e(x) = e^x$.

③ La fonction $\exp_a$ est dérivable de dérivée pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\exp_a'(x) = \ell n(a)\exp_a(x).}$$

④ Lorsque $a \neq 1$, la fonction $\exp_a$ est bijective et sa réciproque est la fonction ℓn_a.

3.8.9 Généralisation du logarithme $x \longrightarrow \ell n_a x$:

La notion de logarithme népérien se généralise dans une base quelconque $a \in \mathbb{R}_+^*$. Posons

$$\ell n_a(x) = \frac{\ell n(x)}{\ell n(a)}, \quad x > 0.$$

Toutes les formules vues pour le logarithme népérien s'applique au logarithme en base quelconque. Lorsque $a = 10$, on est en base décimale. La dérivée la fonction $x \longrightarrow \ell n_a(x)$ est

$$(\ell n_a|x|)' = \frac{1}{\ell n(a)}.\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, posons

$$a^x = e^{x\ell n(a)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

On vérifie facilement les expressions suivantes

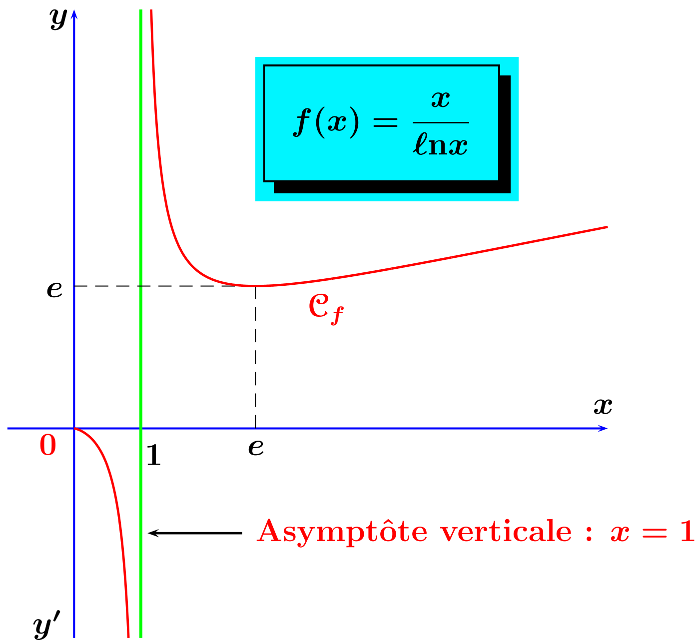
$$\boxed{(a^x)' = a^x\ell n(a), \quad a^{x+y} = a^x a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = 1a^x.}$$

☞ **Exemple 3.8.17** Soient $a > 1$ et α deux réels. Discutons le nombre de racines positives de l'équation $a^x = x^\alpha$. Cette équation s'écrit $e^{x\ell\text{n}(a)} = e^{\alpha\ell\text{n}(x)}$ soit $x\ell\text{n}(a) = \alpha\ell\text{n}(x)$, $\ell\text{n}a \neq 0$. Le nombre de racines est déterminé par le nombre de points d'intersectin de la courbe $\mathcal{C}_f$, $f(x) = \dfrac{x}{\ell\text{n}(x)}$, avec l'horizontale $y = \dfrac{\alpha}{\ell\text{n}(a)}$. La fonction f admet pour dérivée sur l'intervalle $]0,1[\cup]1,+\infty[$ $f'(x) = \dfrac{-1+\ell\text{n}(x)}{[\ell\text{n}(x)]^2}$ qui s'annule pour $x = e$ avec $f(e) = e$. La fonction f est décroissante sur $]0,1[\cap]1,e[$ et croissante sur $]1,+\infty[$ et admet un prolongement par continuité en 0 . De plus, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, la droite d'équation $x = +1$ est une asymptôte verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ell\text{n}(x)}{x} = 0^+$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Tableau de variation et courbe $\mathcal{C}_f$: Le tableau de variation de f sera alors

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

Le graphe de f prend l'allure



Sur le graphe ci-dessus, on en déduit qu'on a : une solution si $\alpha = e\ \ell n(a)$ ou $\alpha \leq 0$. Deux solutions si $\alpha > e\ \ell n(a)$, aucune solution si $0 < \alpha < e\ \ell n(a)$. ◆

3.8.10 Fonctions $x \longrightarrow$ sh x et $x \longrightarrow$ ch x et leurs inverses

Posons, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.}$$

Leurs dérivées successives sont

$$\boxed{(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \quad \text{et} \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.}$$

On vérifie d'autre part la formule suivante

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.}$$

La fonction $x \longrightarrow \text{sh } x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ continue et impaire. Elle strictement croissante de dérivée $\text{sh}'(x) = \text{ch } x > 0$.

Sa fonction réciproque, notée $x \longrightarrow \text{argsh } x$ est aussi continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{y = \text{argsh } x \iff x = \text{argsh } y.}$$

D'autre part, si $x = \text{sh } y$ alors $\dfrac{dx}{dy} = \text{ch } y$ et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\text{ch } y}$. Or, $\text{ch } y > 0$ et $\text{ch } y = \sqrt{1+x^2}$ donc

$$\boxed{(\text{argsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

La fonction $x \longrightarrow \text{ch } x$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$, continue et strictement croissante car $\text{ch}'(x) = \text{sh } x > 0$. Sa fonction réciproque, notée $x \longrightarrow \text{argch } x$, est aussi continue strictement croissante de $]1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi, $y = \text{argch } x, x > 1$ si et seulement si $x = \text{ch } y, y \geq 0$. Alors $\dfrac{dx}{dy} = \text{sh } y$ et $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\text{sh } y}$. Or, pour $y \geq 0$ on a $\text{ch } y > 0$ et $\text{ch } y = \sqrt{1+x^2}$. Donc

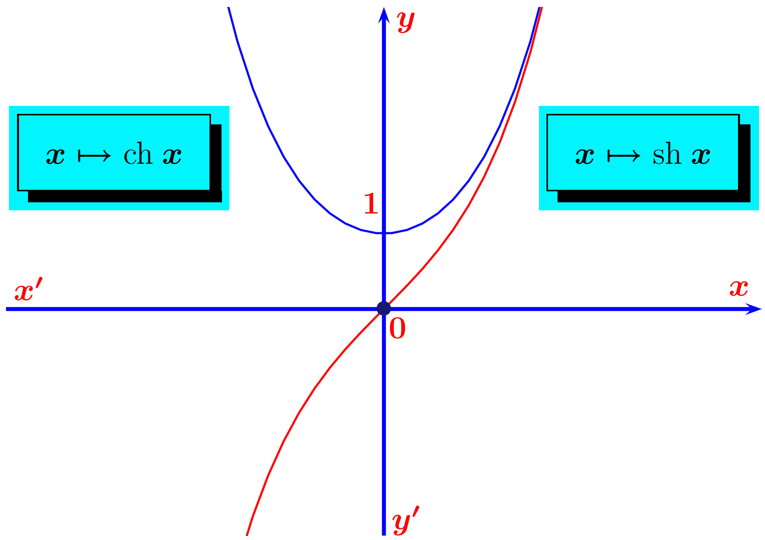
$$\boxed{(\text{argch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.}$$

Au voisinage de $+\infty$, on a $\text{sh } x \simeq \dfrac{e^x}{2}$ et $\text{ch } x \simeq \dfrac{e^x}{2}$. Les courbes représentatives des deux fonctions sont asymptotes à la courbe d'équation $y = \dfrac{e^x}{2}$ avec $\text{sh } x < \dfrac{e^x}{2} < \text{ch } x$.

Au voisinage de $-\infty$, on a $\text{sh } \simeq \dfrac{e^{-x}}{2}$ et $\text{ch } \simeq \dfrac{e^{-x}}{2}$.

Au voisinage de 0, on a $\text{sh } \simeq x$; la première bissectrice d'équation $y = x$ est une tangente d'inflexion. De même $\text{ch } x \simeq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fontions $f : x \longrightarrow \text{ch } x$ et $g : x \longrightarrow \text{sh } x$ prennent les allures suivantes



Les courbes représentatives des fontions réciproques $f^{-1} : x \longrightarrow \text{argch } x$ et $g^{-1} : x \longrightarrow \text{argsh } x$ sont les symétriques par rapport la première bissectrice des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Par ailleurs, on peut exprimer, les fonctions inverses en terme de la fonction $\ell n x$, à savoir

$$\boxed{\textbf{argsh } x = \ell\text{n}(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \textbf{et} \quad \textbf{argch } x = \ell\text{n}(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1.}$$

Pour montrer, par exemple, la première égalité, remarquons que si $x = \text{sh } y$ alors $\text{ch } y = \sqrt{1+x^2}$ et alors $e^y = \text{sh } y + \text{ch } y = x + \sqrt{x^2+1}$ soit que $y = \text{argsh } x = \ell\text{n}(x + \sqrt{x^2+1})$.

3.8.11 Fonctions $x \longrightarrow$ th x et son inverse

La fonction

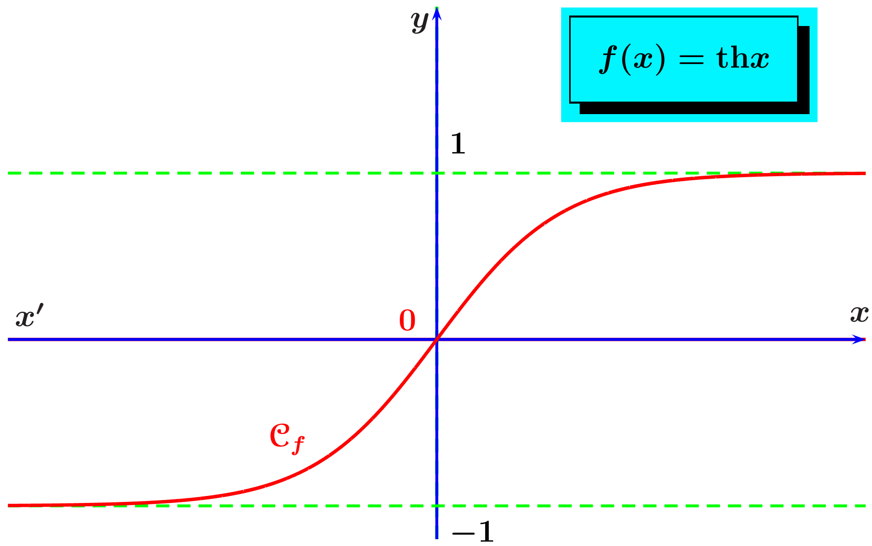
$$f : x \mapsto \textbf{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x - +^{-x}}$$

est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +1[$, continue et indéfiniment dérivable

$$\boxed{\textbf{th}\,'x = \frac{1}{\textbf{ch}\,^2 x} > 0.}$$

Elle est impaire et $\lim\limits_{x \to +\infty} \textbf{th } x = 1$. Au voisinage de 0, on a $\textbf{th } x \simeq x$. Donc la première bissectrice d'équation $y = x$ est une tangente d'inflexion. On vérifie, par ailleurs, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on $|\textbf{th } x| \leq 1$.

L'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f : x \longrightarrow \mathbf{th}\ x$ est



La fonction réciproque à $x \longrightarrow \mathbf{th}\ x$, notée $x \longrightarrow \text{argth}\ x$, est aussi continue strictement croissante de $]-1, +1[$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $y = \text{argth}\ x$, $|x| \leq 1$ si et seulement si $x = \mathbf{th}\ y$. Alors

$$\frac{dx}{dy} = 1 - \tanh^2 y \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \mathbf{th}\ ^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Donc

$$\boxed{(\text{argth}\ x)' = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1.}$$

On a d'autre part :

$$\boxed{\text{argth}\ x = \frac{1}{2}\ell\text{n}\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.}$$

Le graphe de $f^{-1} : x \longrightarrow \text{argth}\ x$ a l'allure symétrique à celle de la courbe $\mathcal{C}_f$.

3.9 Exercices Corrigés

Exercice 3.10.1. ☞ On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

① Montrer que $|f(x)| > |x|$ pour tout $x \neq 0$. En déduire que f est continue à l'origine.

② Calculer $f'_d(0)$ et $f'_g(0)$. La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$.

Solution. Pour calculer les dérivée à gauche et à droite à l'origine, on utilise la définition usuelle de la dérivée en ce point.

① Si $x \neq 0$, la fonction f est continue et

$$f'(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

D'autre part, comme $1 + e^{1/x} > 1$ donc $\dfrac{1}{1+e^{1/x}} < 1$ et $\dfrac{|x|}{1+e^{1/x}} < |x|$. D'où $|f(x)| \leq |x|$ pour tout $x \neq 0$. Par passage à la limite on trouve $\lim\limits_{x\to 0} |f(x)| = 0$ et alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue au point 0.

② Les définitions des limites à gauche et à droite nous donne

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0 \\ f'_g(0) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1. \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0$.

Exercice 3.10.2. ☞ En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1}.$$

Solution. La dérivée d'une fonction réelle f au point x_0 est donnée par $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

① Posons $f(x)=\cos\sqrt{x}$, alors $f(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = -\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -f'(0)$. Or $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. Et donc $f'(0) = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{2}$. La limite cherchée est $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{2}$.

② Posons $g(x)=\arctan x$, alors $g(1)=\dfrac{\pi}{4}$. Ce qui donne

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -g'(0).$$

Or $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $g'(0) = \lim\limits_{x\to 1} g'(x) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan x-\frac{\pi}{4}}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.10.3. ☞ Calculer les dérivées des fonctions suivantes

$$f(x) = \Big(\sin x + \ell\text{n}(4+x^2)\Big)^{\frac{3}{7}}, \quad g(x) = (\cosh)^{\cos^2 x}, \quad x\in\mathbb{R},$$

et

$$h(x) = (1+x^2)\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) \quad x\in]-1,1[.$$

Solution. On utilise les règles de dérivation usuelles dans chaque cas.

① Posons $u(x) = \sin x + \ell n(4 + x^2)$. Alors $f(x) = \Big(u(x)\Big)^{\frac{3}{7}}$ et

$$f'(x) = 37\,\Big(u(x)\Big)^{\frac{3}{7}-1} u'(x) = \frac{3}{7}\,\Big(u(x)\Big)^{-\frac{4}{7}} u'(x).$$

Soit que

$$f'(x) = \frac{3}{7}\left(\cos x + \frac{2x}{4+x^2}\right)\Big(\sin x + \ell n(4+x^2)\Big)^{-\frac{4}{7}}.$$

② La fonction g peut s'écrire $g(x) = (\cosh x)^{\cos^2 x} = e^{\cos^2 x \ell n \mathrm{ch}\, x} e^{v(x)}$ avec $v(x) = \cos^2 x \ell n \mathrm{ch}\, x$. Et alors $g'(x) = v'(x)e^{v(x)}$. Or,

$$v'(x) = \left(-2\cos x \sin x \ell n \mathrm{ch}\; x + \cos^2 x \frac{\mathrm{sh}\; x}{\mathrm{ch}\; x}\right).$$

Donc

$$g'(x) = \frac{3}{7}\Big(-\sin 2x \ell n \mathrm{ch}\; x + \cos^2 \tanh\Big)\Big(\mathrm{ch}\; x\Big)^{\cos^2 x}.$$

③ Posons $v(x) = 1 + x^2$ et $w(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. Alors $v'(x) = 2x$ et $w'(x) = \dfrac{2}{(1-x^2)}$. D'où $h'(x) = v'(x) \arcsin u(x) + v(x)\dfrac{w'(x)}{\sqrt{1-w^2}}$. Enfin, en remplaçant chaque terme par son expresssion et en tenant compte du fait que $x \in]-1,1[$ on trouve : $h'(x) = 2x \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) + 2$.

Exercice 3.10.4. ☞ Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

① Montrer que f est continue au point $x = 0$.

② Déterminer la dérivée à droite $f'_d(0)$ et la dérivée à gauche $f'_g(0)$ de f au point $x = 0$. La fonction f est-elle dérivable au point $x = 0$?

Solution.

① Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\left|\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}$. Donc $|f(x)| = \frac{|x|}{\pi}\left|\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right| \leq \frac{|x|}{2}$, et alors $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Par conséquent la fonction f est continue en $x = 0$.

② Lorsque $x \longrightarrow 0^+$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ et alors

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

La dérivée à droite de la fonction f est $f'_d(0) = \frac{1}{2}$. De même, lorsque $x \longrightarrow 0^-$, $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$ et alors

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 0^-} \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

La dérivée à gauche de la fonction f est $f'_d(0) = -12$. Comme les deux dérivées ne sont pas égales, la fonction f n'est pas dérivable au point $x = 0$.

Exercice 3.10.5. ☞

① Soit $f(x) = x|x|$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

② On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, de la variable x, définies par :

$$f_0(x) = \ell\text{n}|x| \quad \text{et} \quad f_k(x) = f_{k-1}(x+1) - f_{k-1}(x), \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Démontrer que la fonction f_k a pour dérivée au point x

$$\boxed{f'_k(x) = \frac{(-1)^k k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}.}$$

Solution. Pour calculer la dérivée au point 0 on utilisera la définition.

① La fonction f est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ -2x & \text{si } x \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$$

Au point $x = 0$ on a $\left|\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| = |x|$. Donc $f'(0) = 0$.

② Pour $k = 0$ et $k = 1$, on a $f_0'(x) = (\ell\text{n}(|x|)' = \dfrac{1}{x}$ et

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{(-1)^1 1!}{x(x+1)}.$$

Supposons que la relation encadrée dans l'énoncé est vrai à l'ordre k, alors

$$\begin{aligned} f_{k+1}'(x) &= f_k'(x+1) - f_k'(x) \\ &= \frac{(-1)^k k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)} - \frac{(-1)^k k!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)} \\ &= \frac{(-1)^k k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)}\left(\frac{1}{x+k+1} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}. \end{aligned}$$

Exercice 3.10.6. ☞ Calculer la dérivée logarithmique de $f(x) = (x-1)^2(x+2)^3$. En déduire la dérivée $f'(x)$.

Solution. Pour $x > -2$ et $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} \ell\text{n} f(x) &= \ell\text{n}(x-1)^2 - \ell\text{n}(x+2)^3 \\ &= 2\ell\text{n}(x-1) - 3\ell\text{n}(x+2). \end{aligned}$$

En dérivant les deux membres, on obtient $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2}$. Donc, en multipliant les deux membres par l'expression de $f(x)$, on obtient $f'(x) = \frac{-2x^2+7x-5}{(x+2)^4}$.

Exercice 3.10.7. ☞ Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que f' n'est pas continue en $x = 0$.

Solution. Notons que la fonction f est impaire et qu'elle est dérivable en tout point non nul. Pour $x \neq 0$, sa dérivée est $f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. D'autre part, en majorant le taux d'accroissement au voisinage de 0, on obtient

$$0 < |f(x) - f(0)x - 0| = |f(x)x| = |x \sin(1x)| < |x|.$$

Donc $f'(0) = 0$. Par suite f est dérivable en $x = 0$. Pour étudier la continuité de f' au point 0, considérons la suite de points $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n \geq 1$, qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On obtient

$$f'(x_n) = -\cos(n\pi) = (-1)^{n+1} = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ +1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La suite $\left(f'(x_n)\right)_n$ ne converge pas puisqu'elle admet deux limites distinctes. Par suite f' n'est pas continue en $x = 0$.

Exercice 3.10.8. ☞ Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi(x) = \frac{1}{2x}\left[(1+x)^n - 1\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le prolongement par continuité de φ.

Solution. En appliquant la formule du binôme au terme entre crochets, on obtient $\varphi(x) = \frac{1}{2}[C_n^1 + C_n^2 x + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1}]$. Donc $\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{C_n^1}{2} = \frac{n}{2}$. La fonction $\hat{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \\ \frac{n}{2} & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

prolonge la fonction φ par continuité.

Exercice 3.10.9. ☞ Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{(x+1)^{2n+1} + (x-1)^{2n+1}}{(x+1)^{2n+1} - (x-1)^{2n+1}}.$$

① Montrer que la fonction f_n est continue pour n fixé sur $\mathbb{R}$.

② Montrer que, quelque soit x, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $f(x)$ à déterminer.

Solution. La fonction f_n est une fraction rationnelle dont le dénominateur n'a pas de zéro réel. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Remarquons que la fonction f_n, pour n fixé, est impaire. Si $x > 0$, posons $u = \frac{x-1}{x+1}$, qui vérifie $|u| < 1$. Par suite $\lim_{n\to\infty} u^{2n+1} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 0$ donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Par suite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La fonction limite f n'est pas continue en 0.

Exercice 3.10.10. ☞ Soient les fonctions φ et ψ définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\varphi(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \ ?$$

Déterminer leurs prolongements par continuité sur $\mathbb{R}$.

Solution. On sait que $|\varphi(x)| \leq |x|$, alors $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$. La fonction $\hat{\varphi}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

prolonge la fonction φ par continuité. La fonction ψ ne peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ car ψ n'a pas de limite en 0. Pour le voir, prenons $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$. Alors $\psi(x_n) = (-1)^n \dfrac{2n-1}{2}\pi$. Suivant que n est paire ou impaire, on obtient $\lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = \pm\infty$.

Exercice 3.10.11. ☞ Soient f et g deux fonctions numériques n fois dérivables telles que $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$. On note par $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de f.

① Soit $k \leq n$. Démontrer la formule de Leibniz sur la dérivée d'ordre k du produit de deux fonctions

$$\boxed{(f \times g)^{(k)} = \sum_{p=0}^{k} C_k^p f^{(k)} g^{(k-p)}.}$$

② Pour tout $n > 0$, on pose

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right).$$

Montrer que $L_n(x)$ est un polynôme dont on calculera le degré et le cœfficient de son terme de plus haut degré ?

Solution.

① L'égalité cherchée est vraie pour $k = 0$, car $(f \times g)^0 = f \times g = C_0^0 f^{(0)} g^{(0)}$. Supposons que l'égalité est vérifiée à l'ordre k et montrons la à l'ordre $k+1$.

En effet, on a $(f \times g)^{(k+1)} = \left((f \times g)^{(k)}\right)'$. Soit en considérant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
(f \times g)^{(k+1)} &= \left[\sum_{p=0}^{k} C_k^p f^{(p)} g^{(k-p)}\right]' \\
&= \sum_{p=0}^{k} C_k^p \left(f^{(p+1)} g^{(k-p)} + f^{(p)} g^{(k+1-p)}\right) \\
&= f^{(0)} g^{(k+1)} + \sum_{p=1}^{k} (C_k^{p-1} + C_k^p) f^{(p)} g^{(k+1-p)} + f^{(k+1)} g^{(0)}.
\end{aligned}$$

Or, si $1 \leq p \leq k$ on a $C_k^{p-1} + C_k^p = C_{k+1}^p$ et comme $1 = C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1}$, on retrouve bien l'égalité cherchée.

② Par application de la formule de Leibniz on a

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= e^x \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p (e^{-x})^{(p)} \times (x^n)^{(n-p)}\right) \\
&= e^x \left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p (-1)^p e^{-x} . n(n-1) \cdots (p-1) x^p\right) \\
&= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \frac{n!}{p!} x^p.
\end{aligned}$$

Donc

$$L_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_n^p \frac{(n!)^2}{(p!)^2 (n-p)!} x^p.$$

$L_n(x)$ est bien un polynôme dit de Laguerre. Il est de degré n et le cœfficient de son terme de plus haut degré est $(-1)^k$.

Exercice 3.10.12. ☞

① Soit $g(x) = x \sin^2 x$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, calculer $g^{(n)}(0)$, pour tout entier $n \geq 1$.

② Calculer la dérivée d'ordre n des fonctions $h(x) = xe^x$ et $k(x) = e^x \cos x$.

Solution. On écrira la fonction à dériver sous forme de produit de deux fonctions dérivables.

① Posons $g_1(x) = x$ et $g_2(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}\Big(1 - \cos(2x)\Big)$. D'après la formule de Leibniz, on a

$$g^{(n)}(0) = \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k g_1^{(k)}(0) g_2^{(n-k)}(0) = n g_1'(0) g_2^{(n-1)}(0) = n g_2^{(n-1)}(0)$$

parce que $g_1(0) = 0$ et $g_1^{(p)}(0) = 0, p \geq 2$. D'autre part, on a $g_2'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x$ et $g_2''(x) = 2\cos 2x$ et par récurrence sur $p \geq 2$, on obtient les expressions successives des dérivées de g_2, à savoir

$$g_2^{(2p+1)}(x) = (-1)^p 2^{2p} \sin 2x \quad \text{et} \quad g_2^{(2p+2)}(x) = (-1)^p 2^{2p+1} \cos 2x.$$

Par suite $g_2^{(2n+1)}(0) = 0$ et $g_2^{(2n+2)}(0) = (-1)^n 2^{2n+1}$. D'où

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \\ (-1)^{k+1}(2k+1)2^{2k-1} & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

② Posons $h_1(x) = x$ et $h_2(x) = e^x$. Alors

$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= C_n^0 h_1(x) h_2^{(n)}(x) + C_n^1 h_1'(x) h_2^{(n-1)}(x) \\ \\ &= e^{x+n}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ce qui donne $h^{(n)}(x) = e^{x+n}, n \geq 1$. La fonction $k(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$k(x) = e^x \cos x = \frac{1}{2}\left(e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}\right).$$

De là, on obtient

$$\begin{aligned} k^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\Big((1+i)^n e^{(1+i)x} + (1-i)^n e^{(1-i)x}\Big) \\ &= \frac{1}{2} e^x \cos x \Big((1+i)^n + (1-i)^n\Big) + \frac{1}{2} i e^x \sin x \Big((1+i)^n - (1-i)^n\Big) \\ &= e^x (\sqrt{2})^n \left(\cos x \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin x \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right). \\ &= (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Exercice 3.10.13. ☞ On considère la fonction de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

Démontrer que la dérivée d'ordre n de la fonction f est de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! P_n(x)}{(x^2 - 1)^{n+1}}$$

où P_n est un polynôme de degré n dont on calculera les cœfficients.

Solution. La fonction f est définie, continue et indéfinimennt dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, elle peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, d'où

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right) \\ &= (-1)^n n! \underbrace{\frac{(x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}}{2(x^2-1)^{n+1}}}_{P_n(x)}. \end{aligned}$$

Soit que $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! P_n(x)$. Le polynôme $P_n(x)$ est un polynôme de degré n. Ses cœfficients sont donnés par la formule du binôme dans le dé veloppement du polynôme $P_n(x)$.

Exercice 3.10.14. ☞ Montrer que la dérivée d'ordre n de $f(x) = \arctan x$ peut se mettre sous la forme

$$f^n(x) = (n-1)! \cos^n y \ \sin\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Solution. On rappelle que l'écriture de $y = \arctan x$ est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} y \\ \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

On sait que $y' = \dfrac{1}{1+x^2} = \cos^2 y$. La formule donnée est vraie pour $n = 1$. On va établir cette formule par récurrence pour $n \geq 1$. On suppose alors cette qu'elle est est vraie jusqu'à l'ordre n, donc

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)} &= (n-1)!\left[ny' \cos^{n-1} y\ \sin y \sin\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right) + \cos^n y \cos\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right) ny'\right] \\
&= n! y' \cos^{n-1} y \left(-\sin\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right)\sin y + \cos y\ \cos\left(ny + n\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= n! \cos^{n+1} y\ \cos\left(ny + n\frac{\pi}{2} + y\right) \\
&= n! \cos^{n+1} y\ \sin\left((n+1)y + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration.

Exercice 3.10.15. ☞ On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\ \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right).$$

① Indiquer pour quelles valeurs de x la fonction f est définie, continue et dérivable et calculer pour ces valeurs de x la dérivée f'.

② Démontrer que la dérivée d'ordre n de f est une fraction rationnelle de la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1}}$$

où P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$.

Solution. On calcul la limite à gauche et à droite de -1.

① La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $f'(x) = \dfrac{-2x(2x+1)}{(1+x^2)^2}$. Pour la dérivabilité au point $x = -1$, remarquons qu'on a, d'une part $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{\pi}{2}$. La limite à gauche de la fonction f est $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\frac{1}{2} + \pi$. D'autre part, on a

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1-x}{1+x} = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to -1^-} \arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

La limite à droite de la fonction f est $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\frac{1}{2} - \pi$. La fonction f n'est pas dérivable au point $x = -1$.

② La dérivée d'ordre 2 de f est $f''(x) = 2\frac{4x^3+3x^2-4x-1}{(x^2+1)^3}$. La propriété de récurrence est donc vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Supposons qu'elle est établie jusqu'à l'ordre $n-1$. Alors $f^{(n-1)}(x) = \frac{A_n(x)}{(x^2+1)^n}$, où A_n est un polynôme de degré n dont le cœfficient dominant est $a_n \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$f^{(n)}(x) = \frac{(x^2+1)A_n'(x) - 2nxA_n(x)}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{A_{n+1}(x)}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Le numérateur de $f^{(x)}$, comme on peut le constater, est un polynôme dont le terme de plus haut degré est $-na_nx^{n+1}$. Donc $A_{n+1}(x)$ est un polynôme de degré $n+1$. La propriété de récurrence est ainsi démontrée.

Exercice 3.10.16. ☞ Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

① Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

② Montrer que la fonction dérivée f' est dérivable en 0 et calculer $f''(0)$.

③ Généraliser les résultats précédents à l'ordre n quelconque et calculer $f^{(n)}(0)$.

⑤ En déduire le développement de Taylor de la fonction f en 0.

Solution. On utilise la définition de la dérivée au point 0.

① Puisque $f(0) = 0$, le taux d'accroissement de f au voisinage de $x = 0$ est

$$T_{f,0} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{e^{-1/x^2}}{x} = \frac{1/x^2}{e^{1/x^2}}\, x.$$

D'où $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1/x^2}{e^{1/x^2}} . \lim_{x\to 0} x = 0$. La fonction f est donc dérivable à l'origine.

② On a

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{f'(x)}{x} = 2\frac{1/x^2}{e^{1/x^2}} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1/x^2}{e^{1/x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1/x}{e^{1/x}}\right)^2 = 0.$$

Par suite $f''(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{x} = 0$.

③ Si $x \neq 0$, l'hypothèse de récurrence est la suivante

$$f^{(n-1)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) f(x) \quad \text{si} \quad x \neq 0,$$

où P est une fonction polynômiale.

④ Si $n = 2$, l'hypothèse de récurrence est vraie car $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} f(x)$ si $x \neq 0$. La dérivée d'ordre n de f est

$$f^{(n)}(x) = \left[-\frac{1}{x^2} P'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P\left(\frac{1}{x}\right)\right] f(x).$$

Le crochet représente une fonction polynomiale en $\dfrac{1}{x}$ d'où le résultat si $x \neq 0$.

⑤ Si $x = 0$. On suppose par récurrence que $f^{(n-1)}(0) = 0$. Alors $f^{(n)}$ s'écrit

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right) f(x).$$

Si le polynôme P s'écrit en $\dfrac{1}{x}$ sous la forme

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \left(\frac{1}{x}\right)^j$$

alors

$$\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = \left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{1}{x^{j+1}}\right) f(x)$$

et

$$f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{j+1}} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} x^{2k-j-1} . \frac{e^{-1/x^2}}{x^{2k}} = 0.$$

⑥ Puisque $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$, on peut écrire le développement de Taylor de f en 0 sous la forme

$$f(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

Exercice 3.10.17. ☞ Etudier la continuité de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Solution. La fonction φ est continue en 0, car $\lim_{x \to 0^{\pm}} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$. En un point x_0 non nul, posons $X_n = \dfrac{nx_0}{nx_0 + 1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} \varphi[X_n] = \lim_{n \to +\infty} X_n = 1 \neq \varphi(1) = 0$. La fonction φ est discontinue.

Exercice 3.10.18. ☞ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle qu'il existe une constante $\alpha > 1$ qui vérifie $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$, $\forall x, y \in [a, b]$. Montrer que la fonction f est constante.

Solution. Soient $x, y \in [a, b]$ et posons $h = y - x$, alors $|f(x + h) - f(x)h| \leq h^{\alpha - 1}$. Puisque $h \to 0$, on peut supposer que $|h| < 1$. Par suite $|h|^{\alpha - 1} \to 0$ et donc $f'(x) = 0$ en tout point x. La fonction f est donc une constante.

Exercice 3.10.19. ☞ Soit f une fonction deux fois dérivable de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et que $\lim_{x \to \infty} [xf'(x) - f(x)]$ existe et soit négative ou nulle.

① Montrer que l'on a partout $xf'(x) - f(x) \leq 0$.

② On pose $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$. Montrer que g est une fonction décroissante.

Solution.

① Posons $h(x) = xf'(x) - f(x)$, alors $h'(x) = xf''(x)$. Par hypothèse $h'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$. Donc h est croissante sur $]0, +\infty[$. Supposons qu'il existe $x \in]0, +\infty[$ tel que $h(x) = \lambda > 0$. Alors pour tout $y > x$, on a $h(y) \geq \lambda > 0$. Ce qui est impossible par hypothèse. Ainsi, pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $h(x) \leq 0$.

② On a
$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} < 0.$$
Donc g est décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 3.10.20.

① Calculer les limites suivantes $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x}}{1 - e^{2\sqrt{x}}}$.

② Calculer les limites suivantes, pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ell n x}{x^\alpha}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ell n x$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-1/x}}{x}$.

Solution. On vérifie pour chaque fonction les hypothèses du théorème de l'Hôpital.

① Les fonctions sous le signe limite présentent des indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$. D'autre part, on constate que pour le numérateur et le dénominateur, les conditions du théorème de l'Hôpital sont vérifiées. Donc
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x} = -\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = -2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}} = -\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{1-e^{2t}} = -\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{-2e^{2t}} = -\frac{1}{2}.$$

② Même remarque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ell\mathrm{n}x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Ainsi $\lim_{x\to\infty}\frac{\ell\mathrm{n}x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$. Pour la deuxième limite, on a

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ell\mathrm{n}x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ell\mathrm{n}x}{\alpha x^{-\alpha}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0.$$

Ainsi $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha\ell\mathrm{n}x = 0, \quad \alpha > 0$. Pour la troisième limite, on pose $t = \frac{1}{x}$ qui tend vers l'infini lorsque x tend vers 0. On obtient une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Et alors $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x}}{x} = 0$.

Exercice 3.10.21. ☞ Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0^+} x^3\ell\mathrm{n}x$ et $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ell\mathrm{n}x}\right)$.

Solution. La première fonction présente une indétermination de la forme $0\times\infty$ et peut s'écrire sous la forme $x \to x^3\ell\mathrm{n}x = \frac{\ell\mathrm{n}x}{1/x^3}$. On obtient ainsi en $x = 0$ une indétermination de la forme $\infty\infty$. D'où

$$\lim_{x\to 0^+} x^3\ell\mathrm{n}x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^3}}{\ell\mathrm{n}x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{-3} = 0.$$

La deuxième fonction présente une indétermination de la forme $\infty-\infty$ et peut s'écrire

$$x \to \frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ell\mathrm{n}x} = \frac{x\ell\mathrm{n}x - x + 1}{(x-1)\ell\mathrm{n}x}.$$

On obtient l'indétermination en $x = 1$ une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. Donc, en appliquant la règle de l'hôpital 4 fois, on obtient $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ell\mathrm{n}x}\right) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 3.10.22. ☞ Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{3\ \ell \mathrm{n} x}}, \quad \lim_{x\to\infty} (e^{2x}+3x)^{\frac{1}{x}}.$$

Solution. La fonction $x \longrightarrow x^{1/3\ell \mathrm{n} x}$ présente en $x = 0$ une indétermination de la forme 0^0. Posons $y = x^{1/3\ell \mathrm{n} x}$. Le ℓn des deux membres donne $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/3\ell \mathrm{n} x} = e^{1/3}$.
La fonction $x \longrightarrow (e^{2x}+3x)^{1/x}$ présente à l'infini une indétermination de la forme ∞^0. Posons $y = (e^{2x}+3x)^{1/x}$, qui présente une indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$ et alors

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ell \mathrm{n} y &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ell \mathrm{n}(e^{2x}+3x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4e^{2x}}{e^{2x}+3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{8e^{2x}}{4e^{2x}} = 2.\end{aligned}$$

Soit que $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{2x}+3x)^{1/x} = e^2$.

Exercice 3.10.23. ☞ Soit $g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 tel que $g(0) = g'(0) = 0$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{x} & \text{si } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est dérivable au point $x = 0$.

Solution. D'après le théorème de l'Hôpital, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{g''(x)}{2}.$$

Par suite, la fonction f est dérivable au point 0 et sa dérivée est $f'(0) = \dfrac{g''(0)}{2}$.

Exercice 3.10.24. ☞ Montrer par récurrence que, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable et $f^{(n)} = 0$, la fonction f est un polynôme de degré inférieure ou égal à $n-1$.

Solution. Lorsque $n = 1$, si $f' = 0$, d'après le théorème de Rolle, la fonction f est constante. Donc f est un polynôme de degré 0. Supposons que $f^{(n+1)} = 0$, alors $(f^{(n)})' = 0$, donc $f^{(n)} = C$, où C est une constante. Posons $g(x) = f(x) - Cx^n n!$, $x \in \mathbb{R}$. Alors $g^{(n)} = f^{(n)} - C = 0$, et d'après l'hypothèse de récurrence, $g^{(n)}$ est un polynôme de degré inférieure où égal à $n-1$. Donc $f(x) = g(x) + Cx^n n!$ est un polynôme de degré inférieure ou égal à n.

Exercice 3.10.25. ☞ On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P(X) = X^n + pX + q.$$

Montrer, en appliquant le théorème de Rolle que

① Si n est pair, alors P a au plus 2 racines réelles distinctes.

② Si n est impair, alors P a au plus 3 racines réelles distinctes.

Solution. On suppose que $n \geq 2$. La fonction $x \to P(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Rolle, entre deux racines réelles de P on trouve au moins une racine réelle de $P' = xX^{n-1} + p$.

① Si n est pair, $n-1$ est impair et P' a une racine α réelle et une seule, donc P a au plus 2 racines réelles.

② Si n est impair, $n-1$ est pair et P' a au plus 2 racines réelles, ce qui entraine que P en a au plus trois.

③ L'étude des tableaux de variation de P dans les différents cs et le signe de $P(\alpha)$ pour toute racine α de P' donne dans chaque cas le nombre exact de racines de P (par le théorème des valeurs intermédiaires).

Exercice 3.10.26. ☞ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad |f'(x)| \leq |f(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que $f = 0$.

Solution. Fixons x_0 tel que $|x_0| < 1$. D'après le théorème de Rolle, il existe x_1 tel que $|x_1| < |x_0|$ et

$$|f(x_0) - f(x_1)| = |f(x_0)| = |f'(x_1)x_0| \leq |f(x_1)||x_0|.$$

De la même façon, il existe des réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tels que

$$|x_n| < |x_{n-1}| < \cdots < |x_1| < |x_0|$$

et

$$(1) \qquad |f(x_{k-1})| = |f'(x_k)x_{k-1}| \leq |f(x_k)||x_{k-1}| \leq |f(x_k)||x_0|$$

pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$. En multipliant les inégalités (1), on obtient

$$(2) \qquad |f(x_0)| \leq |f(x_n)||x_0|^n.$$

La fonction f est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$, donc bornée sur $[-1, 1]$, il existe une constante M telle que

$$(3) \qquad |f(x)| \leq M, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Les inégalités (2) et (3) entrainent $|f(x_0)| \leq M|x_0|^n \to 0$ si $n \to +\infty$. Par suite, $f(x) = 0$ poue tout $x \in [-1, 1]$. Cela étant, fixons $n \in \mathbb{Z}$. On pose $g(x) = f(x + n)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a $g'(x) = f'(x + n)$, donc

$$|g'(x)| = |f'(x + n)| \leq |f(x + n)| = |g(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

D'après ce qui a précédé, on a $g(x) = 0$, $x \in]-1, 1[$. Donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in]n - 1, n + 1[$. Par suite $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.10.27. ☞ Soient $a < b$ et f une fonction dérivable dans l'intervalle $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in]a, b[$, on pose

$$\phi(x) = (x-a)(x-b)f(c)(c-a)(c-b).$$

Montrer qu'il existe $\gamma \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{f(c) = (c-a)(c-b)\frac{f''(\gamma)}{2}.}$$

Solution. On remarque que ϕ est continue sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$. Elle vérifie $\phi(a) = \phi(b) = 0$ et $\phi(c) = f(c)$. Donc $(f-\phi)(a) = (f-\phi)(b) = (f-\phi)(c) = 0$. La fonction $f - \phi$ satisfaisant aux hypothèses du théorème de Rolle sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Donc

$$\exists \gamma_1 \in]a, c[\ : \ (f' - \phi')(\gamma_1) = 0 \ \text{ et } \ \exists \gamma_2 \in]c, b[\ : \ (f' - \phi')(\gamma_2) = 0.$$

et on a $]\gamma_1, \gamma_2[\subset]a, b[$. La fonction $f' - \phi'$ est dérivable sur $]a, b[$, donc continue sur $[\gamma_1, \gamma_2]$ et dérivable sur $]\gamma_1, \gamma_2[$. Comme $(f'-\phi')(\gamma_1) = (f'-\phi')(\gamma_2)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in]\gamma_1, \gamma_2[$ tel que $(f'' - \phi'')(\gamma) = 0$. Soit que $f''(\gamma) = \phi''(\gamma)$. Or, $\phi''(x) = \dfrac{2f(c)}{(c-a)(c-b)}$.

Exercice 3.10.28. ☞ En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\varphi : x \to xe^{1/x}$ sur l'intervalle $[x, x+1]$. Calculer

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right).$$

Montrer que

$$\boxed{e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0.}$$

Solution. On a $\varphi'(x) = e^{1/x}\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\alpha_x \in]x, x+1[$ tel que

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \varphi'(\alpha_x)(x+1-x) = \varphi'(\alpha_c).$$

Or, lorsque $x \to \pm\infty$, $\alpha_x \to \pm\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi'(\alpha_x) = 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x+1) - \varphi(x) = 1$. C'est à dire

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x} = 1.$$

On applique le théorème des accroissements finis à la focntion $x \to \varphi(x)$ qui est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Il existe $\alpha_x \in]0, x[$ tel que $e^x - e^0 = (x-0)e^{\alpha_x}$ donc $xe^x - 1 = xe^{\alpha_x}$. Mais $1 = e^0 < e^{\alpha_x} < e^x$ donc $xe^{\alpha_x} > x$. Ainsi $e^x > 1 + x, \quad \forall x \neq 0$.

Exercice 3.10.29. ☞ En appliquant la formule des accroissements finis, calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e^{\text{ch } x}}{\cos x - \text{ch } x}.$$

Solution. On applique la formule des accroissements finis à la fonction $x \to e^x$. Il existe alors $\alpha_x \in]\cos x, \text{ch } x[$ tel que $e^{\cos x} - e^{\text{ch } x} = (\cos x - \text{ch } x)e^{\alpha_x}$. Or, lorsque x tend vers 0, α_x tend vers la même limite que $\cos x$ et ch x qui est 0. D'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e^{\text{ch } x}}{\cos x - \text{ch } x} = 1$.

Exercice 3.10.30. ☞ Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $x \to \ell nx$ sur l'intervalle $[n, n+1], n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que la suite (s_n) définie par

$$s_n = \sum_{k+1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Tend vers l'infini. En appliquant de même le théorème des accroissements finis à la fonction $x \to \ell n(\ell nx)$ sur $[n, n+1]$, que peut-on conclure ?

Solution. La fonction ℓn étant dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, en appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n,n+1]$, on obtient $\ell n(n+1)-\ell n n = \frac{1}{c_n}$ pour $c_n \in [n,n+1]$. On en déduit que

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_n} = \sum_{k=1}^{n} [\ell n(k+1) - \ell n(k)].$$

D'où $u_n > \ell n(n+1)$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La fonction $\ell n(\ell n)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$, sa dérivée est $\frac{1}{x\ell n x}$. Donc, en appliquant le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[n,n+1]$ pour $n \geq 2$, on obtient

$$\ell n(\ell n(n+1)) - \ell n(\ell n n) = \frac{1}{\alpha_n \ell n \alpha_n}, \qquad \alpha_n \in [n,n+1].$$

La fonction $\ell n(\ell n)$ étant croissante on a $0 < \ell n n < \ell n \alpha_n$, alors

$$0 < n\ell n n < \alpha_n \ell n \alpha_n \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_n \ell n \alpha_n} < \frac{1}{n \ell n n}.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\ell n k} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\alpha_n \ell n \alpha_n} &= \sum_{k=2} [\ell n(\ell n(k+1) - \ell n(\ell n k)] \\ &= \ell n(\ell n(n+1)) - \ell n(\ell n 2). \end{aligned}$$

Comme $\ell n[\ell n(n+1)]$ tend vers $+\infty$ avec $n \to +\infty$, il en est de même pour la suite (s_n).

Exercice 3.10.31. ☞ Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [1,+\infty[. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur $[0,2]$ et déterminer toutes les valeurs de c telles que $f(2)-f(0) = 2f'(c)$.

Solution. La fonction f est dérivable sur la réunion $]0,1[\cup]1,2[$. Au point $x=1$, on a

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x}=-1$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{-(x+1)}{x}=-1.$$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=-1$. La fonction f est dérivable sur $]-0,2[$. La fonction f satisfait aux hypothèses des accroissements finis sur $[0,2]$, il existe $c\in]0,2[$ tel que $f(2)-f(0)=2f'(c)$ donc $f'(c)=\frac{1}{2}$. On se propose de déterminer toutes les valeurs de c qui vérifient cette relation. Ce qui revient à résoudre l'équation : $x\in]0,2[, f'(x)=-\frac{1}{2}$ Si $x\in]0,1[$, on a $f'(x)=-x$ et l'équation devient : $x\in]0,1[, f'(x)=-\frac{1}{2}$ Ce qui donne $x=\frac{1}{2}$. Si $x\in]1,2[$ alors $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ et on a l'équation $x\in]0,2[, f'(x)=-\frac{1}{2}$. Ce qui donne $x=\sqrt{2}$. Comme $f'(1)=-1\neq-\frac{1}{2}$, l'ensemble des solutions est alors $S=\left\{\frac{1}{2},\sqrt{2}\right\}$.

Exercice 3.10.32. ☞ Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ \\ 0 & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

On pose $f(x)=(x+1)^2(x-2)\varphi(x)$.

① La fonction φ a-t-elle une limite quand $x\to a$ où a est un nombre réel donné ?

② Calculer $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to -1} f(x)$.

③ Soit $x_0\in\mathbb{R}\setminus\{2,-1\}$. Calculer $\lim_{x\to x_0} f(x)$ quand $x\in\mathbb{Q}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Que peut-on conclure ?

Solution.

① Montrons que φ n'a pas de limite quand $x \to a$. Si cette limite existe, elle serait égale à $\varphi(a)$. On envisage ainsi deux cas :

Si $a \in \mathbb{Q}$. Alors $\varphi(a) = 1$ et pour tout $\alpha > 0$, il existe un nombre irrationnel x_0 tel que $|x_0 - a| < \alpha$ et $\varphi(x_0) = 0$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$|x_0 - a| < \alpha \qquad \text{et} \qquad |\varphi(x_0) - \varphi(a)| > \varepsilon. \tag{$*$}$$

Alors la limite de φ n'existe pas quand x tend vers a.

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Alors $\varphi(a) = 0$ et pour tout $\alpha > 0$, il existe un nombre rationnel x_0 tel que $|x_0 - a| < \alpha$. Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a

$$|x_0 - a| < \alpha \qquad \text{et} \qquad |\varphi(x_0) - \varphi(a)| = 1 > \varepsilon. \tag{$**$}$$

② La fonction φ est bornée par 1, donc

$$0 \leq \lim_{x \to 2} |f(x)| \leq \lim_{x \to 2} (x+1)^2 |x-2| = 0$$

et alors $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$. De même $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 0$.

③ Si $x \in \mathbb{Q}$, on a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (x_0+1)^2(x_0-2)$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. On constate que ces deux limites sont différentes, sauf pour $x_0 = -1$ et $x_0 = 2$.

Exercice 3.10.33. ☞ On note par E l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à un nombre réel x fait correspondre sa partie entière $\mathrm{E}\,(x)$. La fonction E est donc définie par

$$\boxed{\mathrm{E}(x) = n \quad \text{si} \quad n \leq x < n+1.}$$

Etudier la continuité des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = \sqrt{x - \mathrm{E}\,(x)}, \quad g(x) = \mathrm{E}\,(x) + \sqrt{x - \mathrm{E}\,(x)}$$

et $h(x) = \mathrm{E}\,(x) + (x - \mathrm{E}\,(x))^2$.

Solution. La fonction E est discontinue aux points $x = n$. En effet, les limites à gauche et à droite au point n sont respectivement $\lim\limits_{x\to n^-} \mathrm{E}(x) = n-1$ et $\lim\limits_{x\to n^+} \mathrm{E}(x) = n$.

① La fonction f est périodique de période 1 : En effet,

Si $0 \leq x < 1$ on a

$$f(x+1) = x+1-\mathrm{E}(x+1) = x+1-1 = x = x-\mathrm{E}(x) = f(x).$$

Si $x > 1$, Il existe $y \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = y+n$ et $\mathrm{E}\ (x) = n+\mathrm{E}\ (y) = n$. Donc

$$f(x+1) = x+1-\mathrm{E}\ (x+1) = x+1-\mathrm{E}(x)-1 = f(x).$$

La fonction f est discontinue aux points $x = n$: Puisque

$$\lim_{x\to n^-} x-\mathrm{E}(x) = n-(n-1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to n^+} x-\mathrm{E}(x) = n-n = 0.$$

D'où $\lim\limits_{x\to n^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to n^+} f(x)$.

② La fonction g est la somme des fonctions E et f, elle est donc continue dans $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Aux points $x = n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g est continue, puisque $\lim\limits_{x\to(n+1)^-} g(x) = n+1 = \lim\limits_{x\to(n+1)^+} g(x)$.

③ La fonction h est la somme de la fonction E et de la fonction $x \longrightarrow [x-\mathrm{E}(x)]^2$. Elle est donc continue aux points de $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Aux points $x = n \in \mathbb{N}$, elle est continue, car $\lim\limits_{x\to n^-} h(x) = n = \lim\limits_{x\to n^+} h(x)$.

Exercice 3.10.34. ☞ Etudier la continuité de la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \\ 1-nx & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

où n est l'entier unique vérifiant $n \leq \dfrac{1}{x} < n+1$.

Solution. La fonction f est continue pour $x < 0$. Etudions sa continuité pour $x \geq 0$.

① **Continuité en $x = 0$.** Montrons que la limite de φ à droite de 0 est nulle, c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;:\; 0 < x \leq \delta \implies |\varphi(x)| \leq \varepsilon$. Choisissons $\delta = \varepsilon$ et soit n_0 l'unique entier tel que $n_0 \leq \dfrac{1}{x} < n_0 + 1$. Puisque $x > 0$, alors $0 \leq 1 - n_0 x < (n_0 + 1)x - n_0 x = x$. Donc $|\varphi(x)| = 1 - n_0 x < x \leq \delta = \varepsilon$. La fonction φ est continue en 0.

② **Continuité pour $x > 1$.** Comme $1/x < 1$ alors $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\varphi(x) = 1$. D'où la continuité de φ.

③ **Continuité en $x = 1$.** A droite on a $\lim\limits_{x \to 1^+} \varphi(x) = 1$. Lorsque $x \to 1^-$, on peut supposer que $\dfrac{1}{2} < x < 1$ et alors $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ d'où $\lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = 0$. La fonction φ est donc non continue en 1.

④ **Continuité pour $0 < x < 1$.** Soit $x \in \left]\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m-1}\right[$ où m est un entier positif non nul. Alors $\varphi(x) = 1 - (m-1)x$. La fonction φ est continue sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{m}, \dfrac{1}{m-1}\right[$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{m}\right) = 0$. D'autre part, les limites de φ à gauche et à droite de $\dfrac{1}{m}$ sont

$$\begin{aligned} \lim_{x \to (1/m)^+} \varphi(x) &= 1 - \frac{(m-1)}{m} = \frac{1}{m} \\ \lim_{x \to (1/m)^-} \varphi(x) &= 1 - \frac{m}{m} = 0. \end{aligned}$$

Donc φ n'est pas continue aux points $\dfrac{1}{m}$ avec m entier positif non nul. Par contre, on a la continuité à gauche.

Exercice 3.10.35. ☞ Soient une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $a \in \mathbb{R}$.

① Montrer qu'on a

$$\Big(f \text{ est continue en } a \in \mathbb{R}\Big) \implies \Big(\text{la suite } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } f(a)\Big).$$

② Soient $\mathbb{I}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction numérique continue sur $\mathbb{I}$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathbb{I}$ vérifiant :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 \in \mathbb{I}.$$

Montrer que si la suite (u_n) converge vers un point $\alpha \in \mathbb{I}$, alors

$$f(\alpha) = \alpha.$$

Solution. On utilise la définition de la continuité d'une fonction et celle de la convergence d'une suite numérique.

① Comme la fonction f est continue en a et la suite (x_n) converge vers a, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_\varepsilon > 0 : |x - a| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - (f(a)| < \varepsilon$$

et

$$\exists N(\eta_\varepsilon) : n > N(\eta_\varepsilon) \implies |x_n - a| < \eta_\varepsilon.$$

Donc pour $n > N(\eta_\varepsilon)$ on a : $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

② Inversement, raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'est pas continue en a. Alors

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta_\varepsilon > 0 : \ |x - a| > \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(a)| > \varepsilon.$$

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite (x_n) tel que $|x_n - a| < \dfrac{1}{n}$.

On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a avec $f(x_n) - f(a)| > \varepsilon$. Ce qui est impossible, puisque toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers a implique que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.

③ Comme α est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la fonction est continue sur $\mathbb{I}$, d'après 1) on a $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\alpha)$.

Exercice 3.10.36. ☞ Soit φ une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction numérique f de la façon suivante

$$f(x) = 2^n \varphi(x-n) \quad \text{si} \quad n \leq x < n+1 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

① Déterminer en fonction de $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ les quantités suivantes

$$\lim_{x \to n^-} f(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to n^+} f(x).$$

Quelle condition portant sur φ, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

② On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x) = ax + b$. Quelle condition doivent vérifier a et b pour que f soit continue ?

③ Revenant au cas général et déterminer la limite de f lorsque $x \to -\infty$.

④ L'application f admet-elle une limite lorsque $x \to +\infty$? (On raisonnera différement suivant que φ s'annule ou non sur $[0,1]$).

Solution.

① Pour étudier la limite de la fonction f lorsque $x \to n^+$, on peut se placer dans l'intervalle $[n-1,n]$. Alors $x-(n-1) \in [0,1]$ et $f(x) = 2^{n-1}\varphi[x-(n-1)]$. Or, $\lim_{x \to n^-} [x-(n-1)] = 1$ et puisque φ est continue sur $[0,1]$, on a $\lim_{x \to n^-} \varphi[x-(n-1)] = \varphi(1)$. Donc $\lim_{x \to n^-} f(x) = 2^{n-1}\varphi(1)$. De la môme façon, on a $\lim_{x \to n^+} f(x) = 2^n\varphi(0)$. Il y aura continuité en $x = n$ si $\varphi(1) = 2\varphi(0)$. En tout point x non entier f est continue comme composée de 2 fonctions continues.

② Si $\varphi(x) = ax + b$, on $\varphi(1) = a + b$ et $\varphi(0) = b$. D'après 1) la fonction f est continue si $a + b = 2b$. Donc $a = b$.

③ Comme la fonction φ est continue, elle est donc bornée sur $[0,1]$. Soit $M > 0$ un majorant de $|\varphi|$ sur cet intervalle. Alors $|f(x)| = |2^n\varphi(x-n)| \leq 2^n M$. Lorsque x tend vers $-\infty$, alors $\mathrm{E}(x) = n < x$ et $\lim_{n \to -\infty} \mathrm{E}(x) = -\infty$. Comme 2^n tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists A_\varepsilon : x < A_\varepsilon \implies 0 < 2^n < \varepsilon M.$$

C'est-à-dire que $|f(x)| < \varepsilon$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

④ Supposons que φ ne s'annule pas sur $[0,1]$. Alors la fonction φ garde un signe constant sur $[0,1]$ et $|\varphi|$ atteint un minimum positif m. Supposons que $\varphi(x) > 0$ sur $[0,1]$ (môme chose si $\varphi(x) < 0$). On a pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi(x) \geq m$. Donc $f(x) \geq 2^n m$ avec $n = \mathrm{E}(x)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{E}(x) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^n m = +\infty$, soit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (Si φ est négative sur $[0,1]$ on aurait $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).

⑤ Supposons maintenant que φ s'annule sur $[0,1]$, on aura à considérer les cas suivants :

⑥ Si $\varphi \equiv 0$ sur $[0,1]$ alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$.

⑦ Si φ s'annule en un point a différent de 1, sans être identiquement nulle. Posons $x_k = a + kn$; on a $f(x_k) = 0$ et alors $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k) = 0$. Mais φ, non identiquement nulle, implique qu'il existe $b \in [0,1]$ tel que $\varphi(b) \leq 0$. Posons $y_k = b + kn$, suivant que $\varphi(b)$ est positif ou négatif on a $\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = \pm\infty$. Du fait que les deux suites (x_k) et (y_k) tendent toutes les deux vers $+\infty$, on prouve que f n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

⑧ φ s'annule en 1 seulement. Il existe toujours une suite y_k telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} f(y_k) = \pm\infty$. Supposons que cette limite est $+\infty$ et montrons que c'est faux. On a

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\alpha : 1 - x < \alpha \implies |\varphi(x)| < \varepsilon.$$

Prenons x tel que $\mathrm{E}(x) + 1 - x < \alpha$ et $\mathrm{E}(x) = B$. Alors $f(x) = 2^B\varphi[x - \mathrm{E}(x)]$. Or, $1 - (x - \mathrm{E}(x)) = \mathrm{E}(x) + 1 - x < \alpha$ implique que $|\varphi(x - \mathrm{E}(x))| \leq \varepsilon$. Soit que $|f(x)| < \varepsilon.2^B$. Il suffit de choisir $\varepsilon < 1/2^B$ pour obtenir que $|f(x)| < 1$.

Exercice 3.10.37. ☞ On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

① La fonction φ admet-elle une limite quand $x \to 1^-$?

② En quels points de $\mathbb{R}$, la fonction φ est-elle continue ?

③ Montrer que si $0 < x < 1$, On a

$$\frac{\exp\left(\frac{-1}{1-x}\right)}{1-x} < \frac{\exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)}{1-x} < \frac{\exp\left(\frac{-1}{2(1-x)}\right)}{1-x}.$$

④ Calculer $\varphi'(x_0)$ pour $|x_0| < 1$.

⑤ La fonction φ est-elle dérivable au point $+1$, au point -1 ?

⑥ La fonction φ est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Solution.

① Quand $x \to 1^-$, alors $1-x^2 \to 0^+$ et $\dfrac{1}{1-x^2} \to +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = 0$.

② Si x_0 est tel que $|x_0| < 1$, on a $\varphi(x_0) = \exp\left(\dfrac{-1}{1-x_0^2}\right)$ et φ est continue en x_0 comme composée de fonctions continues. D'autre part, en $x_0 = +1$, on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = 0 = \varphi(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} \varphi(x)$. Donc φ est bien continue en $x_0 = +1$. Comme la fonction φ est paire, elle est donc continue en $x_0 = -1$.

③ Si $0 < x < 1$ on a $1 - x > 0$ et $1 < 1 + x < 2$ donc $\dfrac{-1}{1-x} < \dfrac{-1}{1-x^2} < \dfrac{-1}{2(1-x)}$. La fonction $x \to e^x$ étant strictement croissante et comme $1-x > 0$ on en déduit l'inégalité cherchée. Posons $\mu = \dfrac{1}{1-x}$, μ qui tend vers $+\infty$ lorsque $x \to 1^-$, et donc $\lim\limits_{\mu\to+\infty} \mu e^{-\mu} = 0$ et $\lim\limits_{\mu\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\mu e^{-\mu/2}\right) = 0$. L'expression $\dfrac{\exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)}{1-x}$ étant comprise entre deux expressions qui tendent vers 0, tend elle même vers 0 quand $x \longrightarrow 1^+$.

④ **Etude de la dérivabilité de φ :**

Si $-1 < x_0 < 1$: Il existe $\eta > 0$ tel que $\mathbb{I} =]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset]-1, 1[$. Pour tout $x \in \mathbb{I}$, la fonction $\varphi(x)$ est dérivable au point x_0 comme composée de fonctions dérivables et $\varphi'(x_0) = \dfrac{-2x_0}{(1-x_0^2)^2} \exp\left(\dfrac{-1}{1-x_0^2}\right)$.

Si $x_0 = 1$: On a $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = 0$ et d'après 3) on a $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = 0$. Donc les dérivées à droite et à gauche sont égales. D'où la dérivabilité de φ avec $\varphi'(1) = 0$.

Si $|x_0| > 1$: On a $\varphi'(x_0) = 0$ comme en a).

Si $x_0 = -1$: Comme la fonction φ est paire, on obtient de b) que φ est dérivable en -1 et que $\varphi'(-1) = 0$.

Exercice 3.10.38. ☞

① Soient a et b deux nombres réels tels que $b > a$ et f une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$ vérifiant la condition :

$$(1) \qquad \forall u, v \in [a, b], \quad u \neq v \implies |f(u) - f(v)| < |u - v|.$$

② Montrer que la fonction f est continue.

③ Montrer que l'équation $f(t) = t$ a une solution unique P. (On étudiera les variations de la fonction F définie par $F(t) = f(t) - t$, à savoir la monotonie, la continuité et le signe).

④ Montrer que si f vérifie la condition (1), alors l'application φ définie sur $[a, b]$ par

$$\varphi(t) = f\Big(f(t)\Big) = f \circ f(t)$$

est une application de $[a, b]$ dans $[a, b]$, qui vérifie (1) et admet le même point fixe P que f (c'est à dire $\varphi(P) = P$).

⑤ On considère une application g de $[a,b]$ dans $[a,b]$, dérivable, telle que

$$\forall x \in [a,b], \quad -1 < g'(x) < 0.$$

Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis , que g vérifie (1). Tous les résultats de 1) sont alors vrais.

⑥ Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in [a,b] \\ u_n = (g \circ g)(u_{n-1}) \end{cases}$$

est monotone.

⑦ Montrer que la suite de terme général u_n converge. Quelle est sa limite ?

Solution.

① Rappelons la définition d'une fonction continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \forall u, v \in [a,b] : \quad |u-v| < \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

② Dans notre exemple, il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$. La fonction f est donc continue.

③ Soit $F(t) = f(t) - t$. La fonction F est continue, elle est décroissante car si $u < v$ alors $u - v < f(u) - f(v) < v - u$ et alors $F(v) < F(u)$. De plus, comme $f(a)$ et $f(b) \in [a,b]$, alors $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Donc $F(a) \geq 0$ et $F(b) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, F prend sur $[a,b]$ toutes les valeurs comprises entre $F(a)$ et $F(b)$. Or, $F(b) \leq 0 \leq F(a)$ alors il existe $P \in [a,b]$ tel que $F(b) = 0$ donc $f(P) = P$. De plus, ce point P est unique. Pour le montrer raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux points distincts P et P' dans l'intervalle $[a,b]$ tels que $f(P) = P$ et $f(P') = P'$. Alors $|f(P) - f(P')| < |P - P'|$. Ce qui est absurde car alors $|P - P'| < |P - P'|$.

④ Il est immédiat que φ est une application de $[a,b]$ dans lui-même et pour tous $u, v \in [a,b]$ et $u \neq v$ on a

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| = |f(f(v)) - f(f(u))| < |f(u) - f(v)| < |u - v|.$$

Donc, l'application φ admet un point fixe unique et comme $\varphi(P) = f(f(P)) = f(P) = P$. L'application φ admet le même point fixe que f.

⑤ Application du théorème des accroissements finis à l'application g. Il existe $c \in]u, v[$ tel que $g(u)-g(v) = (u-v)g'(c)$. Et alors $|g(u)-g(v)| = |(u-v)g'(c)| < |u-v|$. Donc l'application g vérifie (1). L'application g étant décroissante sur l'intervalle $[a, b]$ et par suite $g \circ g$ est croissante. Soit $G(x) = g \circ g(x) - x$. On a bien $G(a) \geq 0$ et $G(b) \leq 0$. Il existe un point $P' \in [a, b]$ tel que $G(P') = 0$. Si $x \in [a, P']$: On a $G(x) \geq 0$, ce qui peut se traduire par par $u_1 \geq u_0$ et comme $g \circ g$ est croissante, on en déduit que $g \circ g(u_1) \geq g \circ g(u_0)$ donc $u_2 \geq u_1$. Et par récurrence, on a $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante. Si $x \in [P', b]$: On a $G(x) < 0$, ce qui peut encore se traduire par $u_1 < u_0$ et comme $g \circ g$ est croissante, on en déduit que

$$g \circ g(u_1) < g \circ g(u_0) \text{ donc } u_2 < u_1.$$

Et par récurrence, on a $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est décroissante.
Dans les deux cas, la limite ℓ vérifie $g \circ g(\ell) = \ell$. La limite ℓ est donc l'unique point fixe de l'application g.

Exercice 3.10.39. ☞ Soient F une fonction de classe C^5 sur l'intervalle $]-1, 1[$ et f sa dérivée.

① Montrer qu'il existe un polynôme unique q de degré inférieur à 3 tel que

$$q(0) = f(0), \quad q(-1) = f(-1), \; q(1) = f(1) \text{ et } q'(0) = f'(0).$$

② Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(0) = 0$, $Q' = q$ et que

$$Q(1) - Q(-1) = \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big).$$

③ Soit P le polynôme $P(x) = \dfrac{x^2(1-x^2)}{4!}$. Déterminer $\sup\limits_{x \in [-1,1]} P(x)$.

④ Soit c tel que $0 < |c| < 1$, $c \in \mathbb{R}$. On pose

$$h(x) = f(x) - q(x) - \frac{f(c) - q(c)}{P(c)}.P(x).$$

Montrer en utilisant le théorème de Rolle, que h' s'annule en 0 et en trois autres points de $]-1,1[$.

⑤ En déduire que $h^{(4)}$ s'annule sur l'intervalle $]-1,1[$ et qu'il existe un nombre $t\in]-1,1[$ tel que $f^{(4)}(t)=\dfrac{f(c)-q(c)}{P(c)}$.

⑥ Soit M un nombre tel que pour tout $x\in[-1,1]$, on a $|f^{(4)}(x)|\leq M$. Montrer que pour tout $x\in[-1,1]$, on a

$$|f(x)-q(x)|\leq M\frac{x^2(1-x^2)}{4!}.$$

⑦ Montrer que

$$\left|F(1)-F(-1)-\frac{1}{3}\left[f(-1)+4f(0)+f(1)\right]\right|\leq\frac{M}{90}.$$

(On pourra étudier le sens de variation des fonctions

$$x\ \to P(x)-Q(x)-\frac{M}{360}(5x^3-3x^5)$$
$$x\ \to P(x)-Q(x)+\frac{M}{360}(5x^3-3x^5)).$$

Solution.

① S'il existe deux solutios q_1 et q_2 de degré inférieure où égal à 3. Le polynôme différence q_1-q_2 est aussi de degré inférieure où égal à 3 et s'annule en -1, 0 et 1. Donc q_1-q_2 est proportionnel à $x(x+1)(x-1)=x^3-x$. Il existe alors $a\in\mathbb{R}$ tel que $q_1(x)-q_2(x)=a(x^3-x)$. Or, on a $q_1'(0)-q_2'(0)=-a=0$ donc $q_1=q_2$. Le polynôme $K(x)=q(x)-(f(0)+xf'(0))(1-x^2)$ a une racine double en 0. En effet, $q(0)-f(0)=0$ et le polynôme dérivé $K'(x)=q'(x)-f'(0)(1-x^2)+2x(f(0)+xf'(0))$ s'annule en $x=0$. De plus, il est égal à q en 1 et -1. Il est donc divisible par x^2 et puisqu'il est de degré inférieure où égal à 3, il s'écrit sous la forme $x^2(\alpha x+\beta)$. En identifiant les valeurs en $+1$ et -1, on obtient $q(1)=f(1)=\alpha+\beta$ et $q(-1)=f(-1)=-\alpha+\beta$. On trouve $\alpha=\dfrac{f(1)+f(-1)}{2}$

et $\beta = \dfrac{f(1) - f(-1)}{2}$. Donc

$$q(x) = \Big(f(0) + xf'(0) \Big) \ (1 - x^2) + \frac{x^2}{2} \ \Big((1 + x)f(1) + (1 - x)f(-1) \Big) \ .$$

② Si le polynôme q s'écrit $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, le polynôme qui convient est $Q(x) = a\dfrac{x^4}{4} + b\dfrac{x^3}{3} + c\dfrac{x^2}{2} + d$. De plus $Q(1) - Q(-1) = \dfrac{2b}{3} + 2d$. En utilisant ce qui précède, on trouve $d = f(0)$ et $b = -f(0) + \dfrac{f(2) + f(-1)}{2}$. Donc

$$Q(1) - Q(-1) = \frac{1}{3} \ \Big(f(-1) + 4f(0) + f(1) \Big) \ .$$

③ Puisque $P(1) = P(-1) = 0$, le maximum de $|P|$ sur l'intervalle $[-1, +1]$ est obtenu en une racine de

$$P' = \frac{1}{4!} \ \Big(2x(1 - x^2) - 2x^3 \Big) \ = \frac{2x}{4!}(1 - 2x^2).$$

Puisque $P(0) = 0$, le maximum de $|P|$ est obtenu pour $x^2 = \dfrac{1}{2}$ c'est à dire

$$\sup_{x \in [-1,1]} (|P(x)|) = \frac{1}{4!}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{96}.$$

④ D'après la définition de q, la fonction $f - q$ s'annule en $-1, 0, 1$ et sa dérivée s'annule en 0. Il en résulte que h s'annule en $-1, 0$ et 1. De plus $h(c) = 0$. En vertu du théorème de Rolle, la dérivée h' s'annule au moins une fois dans chacun des 3 intervalles délimités par -1, 0 et 1. Comme $h'(0) = 0$, la fonction h' s'annule en 0 et en trois points non nuls de $]-1, 1[$. En appliquant encore le théorème de Rolle, h'' s'annule au moins trois fois, $h^{(3)}$ au moins deux fois et $h^{(4)}$ au moins une fois dans $]-1, +1[$. Soit $t \in]-1, 1[$ tel que $h'^{(4)}(t) = 0$. Comme $q^{(4)}(t) = 0$ et $p^{(4)}(t) = 1$. Alors on a

$$\begin{aligned} h^{(4)}(t) &= f^{(4)}(t) - q^{(4)}(t) - \frac{f(c) - q(c)}{p(c)} p^{(4)}(t) \\ &= f^{(4)}(t) - \frac{f(c) - q(c)}{p(c)} = 0. \end{aligned}$$

Donc $f^{(4)}(t) = \dfrac{q(c) - f(c)}{p(c)}$.

D'après ce qui précède, on a pour tout $c \in]-1, +1[$, $c \neq 0$ et

$$f(c) - q(c) = P(c)f^{(4)}(t) \quad \Longrightarrow \quad |f(c) - q(c)| \leq M|P(c)| \leq M\frac{c^2(1 - c^2)}{4!}.$$

Cette inégalité est encore valable en -1, 0 et 1, puisque les deux membres y sont nuls.

⑤ Soit $g(x) = F(x) - Q(x) - \frac{M}{360}(5x^3 - 3x^5)$. On a

$$g'(x) = f(x) - q(x) - M\frac{x^2 - x^4}{4!} = f(x) - q(x) - MP(x).$$

D'après 5) on a $f(x) - q(x) \leq MP(x)$. Donc $g'(x) \leq 0$ et g est décroissante. Donc

$$g(1) - g(-1) = F(1) - F(-1) - Q(1) + Q(-1) - \frac{M}{90} \leq 0.$$

C'est à dire $F(1) - F(-1) - Q(1) + G(-1) \leq M/90$. D'après 2), on a

$$F(1) - F(-1) - \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) \leq \frac{M}{90}.$$

De même en étudiant $g_1(x) = F(x) - Q(x) + \frac{M}{360}(5x^3 - 3x^5)$. On trouve

$$F(1) - F(-1) - \frac{1}{3}\Big(f(-1) + 4f(0) + f(1)\Big) \geq -\frac{M}{90}.$$

3.10 Problèmes corrigés

Énoncé 1

Étudier la fonction $f(x) = \arcsin\left(\frac{2e^x - 3}{e^x + 1}\right)$ **et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Étudier en particulier le domaine de définition, les limites aux bornes de ce doamine, la dérivabilité et le tableau de variation.**

Solution :

① **Domaine de définition et limites :** La fonction f est définie si $e^x + 1 \neq 0$ et $-1 \leq \frac{2e^x - 3}{e^x + 1} \leq 1$. Comme $e^x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors tout $x \in \mathcal{D}_f$ doit vérifier $-(e^x + 1) \leq 2e^x - 3 \leq e^x + 1$ soit que $\frac{2}{3} \leq e^x \leq 4$ donc $\mathcal{D}_f = \left[\ell n\left(\frac{2}{3}\right), \ell n(4)\right]$. Si l'on Pose $u : t \mapsto \frac{2t - 3}{t + 1}$, la fonction f s'écrit comme composée de fonctions à savoir : $f = \arcsin \circ u \circ \exp$. Pour $x \in \mathcal{D}_f$, alors $e^x \in$

$\left[\frac{2}{3},4\right[$. Mais la fonction u est strictement croissante sur cet intervalle, alors $u(e^x) \in [-1,1]$ et comme arcsin est définie continue sur $[-1,1]$, il s'en suit que et f est continue sur $\mathcal{D}_f$. D'où les limites suivantes aux bornes de $\mathcal{D}_f$:

$$\lim_{x \to \ell n\left(\frac{2}{3}\right)} f\left(\ell n\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \ell n(4)} f(\ell n(4)) = \frac{\pi}{2}.$$

② **Dérivabilité :** Comme arcsin est dérivable sur $]-1,1[=$, alors la fonction f, qui est composée de fonctions dérivables, sera dérivable sur $\mathcal{D}_f$ privé des points où $u(e^x) = -1$ et $u(e^x) = 1$; donc plus précisément, privéee des points $\ell n\left(\frac{2}{3}\right)$ et $\ell n(4)$. La fonction f est dérivable sur $\left]\ell n\left(\frac{2}{3}\right), \ell n(4)\right[$.

Pour calculer la dérivée, on écrit $f(x) = \arcsin(u(e^x))$. Donc, en appliquant la dérivée d'une composée, on obtient $f'(x) = \arcsin'(u(e^x)) \times u'(e^x) \times (e^x)'$. Or,

$$\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}; \quad u'(t) = \frac{5}{(t+1)^2}; \quad (e^x)' = e^x.$$

En remplaçant chaque terme par son expression, on trouve :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-u(e^x)^2}} \times \frac{5}{(e^x+1)^2} \times e^x \\ &= \frac{5e^x}{(e^x+1)\sqrt{(3e^x+1)(-e^x+4)}} > 0. \end{aligned}$$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left]\ell n\left(\frac{2}{3}\right), \ell n(4)\right[$.

③ **Tableau de variations :**

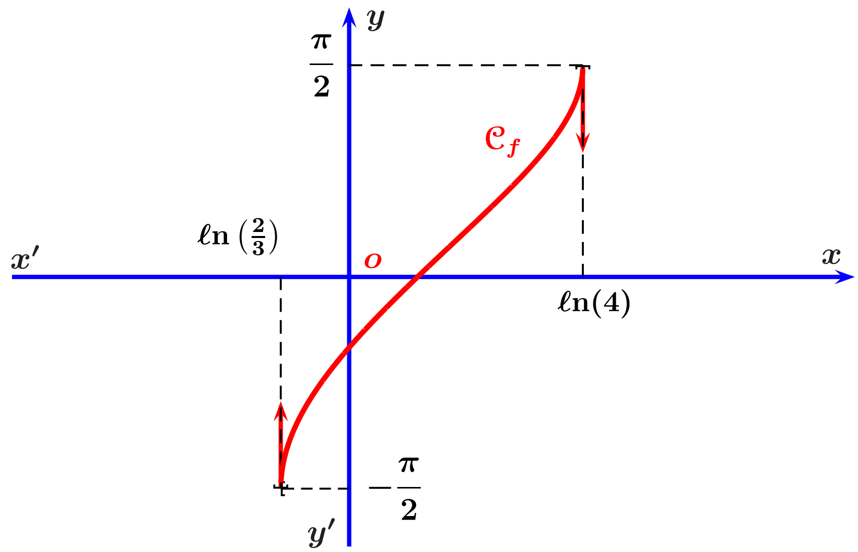
x	$\ell n\,(2/3)$		$\ell n(4)$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

④ **Courbe représentative :** La courbe $\mathcal{C}_f$ admet des demi-tangentes aux points :

$$A = \left(\ell n(4), \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad B = \left(\ell n\left(\frac{2}{3}\right), -\frac{\pi}{2}\right).$$

Elles sont perpendiculaires à l'axe des ordonnées car

$$\lim_{x \to \ell n\left(\frac{2}{3}\right)} f'\Big(\ell n(x)\Big) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \ell n(4)} f'(x) = -\infty.$$



Énoncé 2

Soit la fonction f définie par

$$f(x) \;=\; \sqrt{x^2 - 3 + \frac{2}{x}}.$$

Déterminer son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Étudier la continuité de f et dresser son tableau de variation puis tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Solution :

① **Domaine de définition :** On peut écrire $f(x) = \sqrt{h(x)}$ où $h(x) = x^2 - 3 + \dfrac{2}{x} = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x}$ qui s'annule pour $x = 1$ et $x = -2$. La fonction est définie si $h(x) \geq 0$, mais $h(x)$ est de même signe que $x(x+2)$ qui sera positif si $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[= \mathcal{D}_f$. De plus, la fonction est continue sur $\mathcal{D}_f$ puisqu'elle s'écrit comme composée d'une fonction racine carrée et d'une fonction rationnelle qui sont continues sur $\mathcal{D}_f$.

② **Limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$:** La fonction f est définie et continue à gauche de f et $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = f(-2) = 0$. A droite de 0, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{\dfrac{1}{x}} = +\infty$. A l'infini, on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{(x^2)} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} |x| = \pm\infty$. La courbe admet la droite d'équation $x = 0$ comme asymptote verticale. Déterminons les asymptotes obliques suivant que x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. La fonction f s'écrit $f(x) = |x|\sqrt{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^3}}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$. Or, après multiplication par le conjugué du dénominateur, on obtient $f(x) - x = \dfrac{-3 + \frac{2}{x}}{f(x) + x}$ et $f(x) + x = \dfrac{-3 + \frac{2}{x}}{f(x) - x}$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x)] = 0^+$. Lorsque $x \to +\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet comme asymptote oblique la première bissectrice d'équation $y = x$ et $f(x) - x < 0$, donc la courbe est au-dessous de son asymptote. Lorsque $x \to -\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet comme asymptote oblique la deuxième bissectrice d'équation $y = -x$, mais $f(x) + x < 0$, donc la courbe est au-dessus de son asymptote.

③ **Dérivabilité :** La fonction $x \to \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$, comme $f(x) = \sqrt{h(x)}$ alors f est dérivable en tout point de $\mathcal{D}_f$ tel que $h(x) \neq 0$. Donc, elle est déribable sur $]-\infty, -2[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{x^3 - 1}{x^2 f(x)}.$$

Dérivabilité en $(-2)^-$: On utilise la définition de la dérivée en -2^-. Le taux d'accroissement s'écrit

$$T_{-2}(x) = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{|x-1|\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}{x+2}.$$

Lorque $x \to -2^-$, on a $x+2<0$, $x<0$ et $|x-1| = 1-x$. Donc $\dfrac{\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}}{x+2}$ est du même signe que

$$\frac{\sqrt{\dfrac{-(x+2)}{-x}}}{-\sqrt{((-x-2))^2}}.$$

On obtient alors

$$T_{-2}(x) = \frac{1-x}{\sqrt{-x-2}\sqrt{-x}}$$

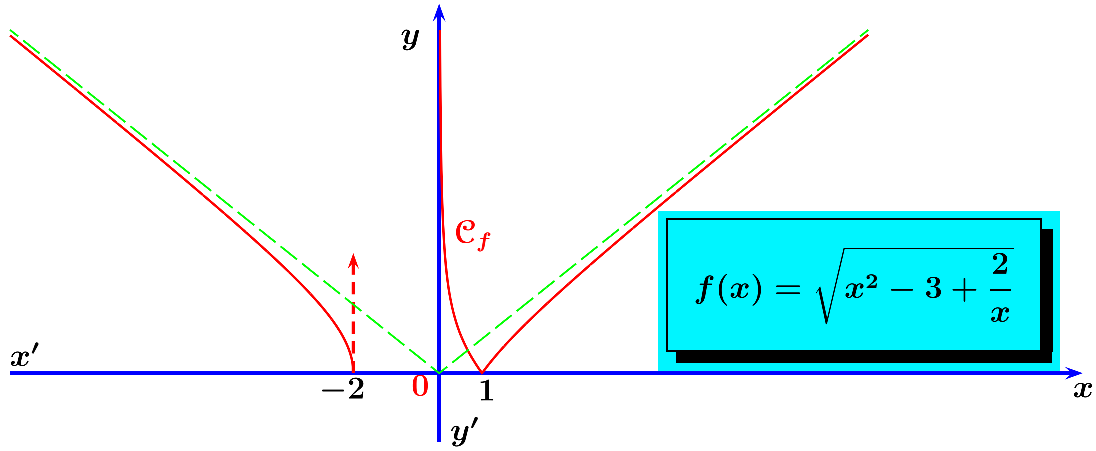
D'où $f'(-2) = \lim\limits_{x\to -2^-} = -\infty$. Donc la fonction f n'est pas dérivable à gauche de -2. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet, à gauche de -2, une demi-tangente verticale tournée vers le haut.

Dérivabilité en 1^+ : On applique le même principe que précédemment pour obtenir que $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+} T_1(x) = \sqrt{3}$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet, au voisinage de 1^+, une demi-tangente de cœfficient directeur $\sqrt{3}$.

③ **Tableau de variation :** Comme $x^2 f(x) > 0$, la dérivée f' est du même signe que $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ c'est-à-dire de même signe que $x-1$ puisque x^2+x+1 est positif. Le tableau de variation de f est alors

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0 ||		|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

④ **Courbe $\mathcal{C}_f$:** La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f prend l'allure



y
$\mathcal{C}_f$
$f(x) = \sqrt{x^2 - 3 + \frac{2}{x}}$
x'
-2
0
1
x
y'

Chapitre 4

Développements limitée et Formule de Taylor

C'est au 19ème siècle, suite au travaux de plusieurs Mathématicien dont Taylor, Young, Lagrange et MacLaurin, qu'on s'est rendu compte du besoin d'approcher les fonctions usuelles par des polynômes. Plus précisément, l'existence de la dérivée d'ordre n d'une fonction f au voisinage d'un certain x_0 implique l'existence d'un polynôme P_n de degrè inférieure ou égale à n tel que la différence $f - P_n$ soit négligeable devant $(x - x_0)^n$. On commence, tout d'abord, par définir les notions permettant de comparer deux fonctions.

4.1 Fonctions équivalentes

Soient $\mathbb{I}$ un intervalle du corps $\mathbb{K}$ des nombres complexes ou réels et $x_0 \in \mathbb{I}$. Soient f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ deux fonctions définies sur $\mathbb{I}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition. *La fonction f est dite équivalente à la fonction g au voisinage de x_0 lorsqu'il existe une fonction $h \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ tel que*

$$f(x) = g(x)h(x) \quad et \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = 1.$$

On écrira dans ce cas

$$\boxed{f \sim g \quad \text{au voisinage de } x_0.}$$

La relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence qui vérifie les propriétés suivantes :

① Soient f, g, φ et $\phi \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$. Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ alors $fg \sim f_1 g_1$. Par contre $f \pm g \not\sim f_1 \pm g_1$, comme on peut le constater sur l'exemple suivant : $x + x^2 \sim x + x^3$ et $x \sim x$ alors que $x^2 \not\sim x^3$. De même si f et g sont non nulles, on a

$$\frac{1}{f} \sim \frac{1}{f_1} \qquad \text{et} \qquad [f(x)]^n \sim [f_1(x)]^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cette dernière équivalence dépend bien evidemment du signe de f et f_1 et de la parité de n.

② Dans une expression du genre

$$F(x) = \frac{[f_1(x)]^{n_1}[f_2(x)]^{n_2} \cdots [f_p(x)]^{n_p}}{[g_1(x)]^{m_1}[g_1(x)]^{m_2} \cdots [g_h(x)]^{m_h}},$$

on peut remplacer chaque fonction par l'expression qui lui est équivalente, mais il ne faut jamais procédé à des sommes ou à des différences.

La notion de fonctions équivalentes permet de ramener, localement, l'étude d'une fonction à celle d'une fonction dont le comportement est connu.

☞ **Exemple 4.1.1** Soit P un polynôme de degré n qui s'écrit sous la forme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Alors

$$\boxed{P(x) \sim a_n x^n \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers } \pm\infty.}$$

En effet, le polynôme P s'écrit

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right) \\ &= a_n x^n k(x). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ce qui donne le résultat puisque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} k(x) = 1$. Ainsi si P et Q sont deux polynômes de degrés respectifs n et m et de cœfficients dominants a_n et b_n, alors

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \qquad \text{lorsque } x \text{ tend vers } \pm\infty. \quad \blacklozenge}$$

☞ **Exemple 4.1.2** Soit f une fonction dérivable au point x_0. La fonction f s'écrit au voisinage de x_0 sous la forme

$$\boxed{f(x) - f(x_0) \sim (x - x_0) f'(x_0) \quad \text{lorsque } x \to x_0.}$$

Ceci appliqué au voisinage de 0 aux fonctions usuelles, on obtient les équivalences suivantes

$$\boxed{\sin x \sim x; \quad \sinh x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x.}$$

et

$$\boxed{e^x - 1 \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x.}$$

De même, on a

$$\boxed{(1+x)^\alpha \sim 1 + \alpha x; \quad \operatorname{arctg} x \sim x; \quad \arcsin x \sim x.}$$

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$. Mais, au voisinage de 0, $\sin x \sim x$. Ce qui donne l'équivalence utile suivante

$$\boxed{1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}. \quad \blacklozenge}$$

☞ **Exemple 4.1.3** Supposons qu'on veut calculer la limite de $f(x) = (1 + 3\sin^2 x)^{1/x \operatorname{tg} x}$ lorsque $x \to 0$. Cette fonction présente une indétermination exponentielle de la forme 1^∞. Remarquons que f peut s'écrire sous la forme $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} \ell n(1 + 3x^2)\right)$. Mais, au voisinage de 0, on a $\sin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$ et $\ell n(1 + 3x^2) \simeq 3x^2$. Alors $f(x) \sim \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln(1 + 3x^2)\right) \simeq e^3$. Enfin $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^3$. $\blacklozenge$

Une certaine classe de fonctions dites **indéfiniment différentiables** jouera un rôle important dans ce qui suit. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$. Si la dérivée $f^{(n)}$ d'ordre n de f est continue, la fonction f est dite **de classe $\mathcal{C}^n$**. Il est clair que, dans ce cas, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^i$ pour $i < n$. Par ailleurs, la fonction suivante est de classe $\mathcal{C}^n$, mais elle n'est pas de *classe* $\mathcal{C}^{n+1}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Si toutes les dérivées de f existent et sont continues, on dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ou que f est **indéfiniment différentiable**. Par exemple, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

4.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange

Nous avons vu que si une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ est dérivable au voisinage de x_0, il existe une fonction $\varepsilon(x)$ qui tend vers 0 au voisinage de x_0 tel que

$$f(x) = xf'(x_0) + f(x_0) - x_0 f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Ainsi, en posant $a = f'(x_0)$ et $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$, la fonction f s'écrit

$$f(x) = ax + b + x\varepsilon(x), \text{ où } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Autrement dit, au voisinage de x_0, on a

$$\boxed{f(x) \sim ax + b.}$$

On peut, ainsi, remplacer la fonction f par un polynôme de degré 1 à savoir $ax + b$. Cette substitution d'une fonction par un polynôme se généralise à une fonction indéfiniment dérivable sur l'intervalle $\mathbb{I}$. En fait, Toute fonction f différentiable jusqu'à l'ordre $n+1$, peut s'écrire approximativement au voisinage d'un point x_0 sous la forme d'un polynôme de degré n. L'erreur commise dans cette approximation s'exprime en fonction de sa dérivée $f^{(n+1)}$. Ceci est en substance **la formule de Taylor** de f sur un intervalle contenant x_0.

Théorème 4.2.1 (Taylor-Lagrange). *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b], \mathbb{K})$ une fonction définie sur $[a,b]$, de classe $\mathcal{C}^n$ et admet une dérivée d'ordre $n+1$ définie sur $]a,b[$. Il existe alors $x_0 \in]a,b[$ tel que*

$$\boxed{f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0).}$$

Preuve : Définissons la fonction auxilliaire suivante

$$\varphi(x) = f(b) - \left\{ f(x) + (b-x)f'(x) + \cdots + \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \right\} + \gamma(b-a)^{n+1}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

On choisira la constante γ pour que le théorème de Rolle soit appliqué à la fonction φ. La fonction φ est continue et différentiable sur $[a, b]$ et vérifie $\varphi(b)$. Pour que $\varphi(a) = 0$ il faut que

$$\gamma = \frac{1}{(b-a)^{n+1}}\left\{-f(b) + f(a) + (b-a)f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right\}.$$

Avec ce choix de γ, la fonction auxilliaire φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe ainsi $x_0 \in]a, b[$ tel que $\varphi'(x_0) = 0$, c'est à dire

$$\gamma = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0).$$

Le théorème est démontré. ◆

Changeons de notation en prenant $a = x$ et $b = x + h$. Tout nombre $x_0 \in]x, x + h[$ s'écrit sous la forme $x + \theta h$, $0 < \theta < 1$. La formule de Taylor avec reste de Lagrange devient

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h).}$$

Pour $n = 0$, cette formule donne le théorème des accroissemnts finis.

Avec les hypothèses du théorème 1 et en prenant $a = 0$ et $h = x$ dans la formule précédente, on obtient **la formule de McLaurin avec reste de Lagrange**

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).}$$

Cette formule est valable si f admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n et que la dérivée d'ordre $n + 1$ existe dans un intervalle fermé dont les extrémités sont 0 et x.

Le nombre

$$\boxed{R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)}$$

est dit **reste de Lagrange.**

☞ **Exemple 4.2.1** Prenons $f(x) = \sin x$, alors

$$f'(x) = \cos x, \;\; f''(x) = -\sin x, \;\; f^{(3)}(x) = -\cos x, \cdots$$

En appliquant la formule de McLaurin au voisinage de 0 pour $n = 8$, il vient que

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}\cos\theta x$$

avec $0 < \theta < 1$ et $\xi = \theta x$. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \cos\theta x \leq 1$. Donc

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}.$$

Ces inégalités nous permettent de calculer $\sin x$ avec une bonne approximation. Mais l'approximation deviendrait encore meilleure si on appliquait la formule de McLaurin au voisinage de 0 avec un ordre plus élevé. On précisera cette idée plus tard. ◆

Il est clair qu'au voisinage du point 0, ou la limite suivante est nulle

$$\lim_{n\to\infty} R(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) = 0, \qquad \xi \in]0, x[,$$

la fonction f s'écrit

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Le second membre de cette égalité est dit *série de Taylor de f* au voisinage de a. C'est le développement en série entière de la fonction $x \to \sin x$ un nombre infini de termes.

☞ **Exemple 4.2.2** La série de Taylor associée à la fonction $x \to e^x$ au voisinage de 0 est

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots}$$

Puisque, au voisiange de 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi_n} = 0$. En effet, soit m un entier tel que $m > 2|x|$. Pour $n \geq m$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi_n} &= e^{|\xi|} . \frac{|x|^m}{m!} \left(\frac{|x|}{m+1}\right)\left(\frac{|x|}{m+2}\right) \cdots \left(\frac{|x|}{n+1}\right) \\
&\leq e^{|\xi|} . \frac{|x|^m}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m+1}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$|R_n(x)| \leq M . \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{avec} \quad M = 2^{m-1} . e^{|\xi|} . \frac{|\beta|^m}{m!}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$. ◆

4.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ dont le graphe est noté par $\mathcal{C}_f$ et x_0 un point de l'intervalle $\mathbb{I}$. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point a pour équation

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0) = hf'(x_0) + f(x_0), \quad h = x - x_0.$$

Soit $n \geq 2$ le plus petit entier tel que $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. La formule de Taylor avec reste de Lagrange s'écrit au voisinage du point x_0 s'écrit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0) + 0(1)\right]$$

lorsque $h \to 0$. Ce qui donne

$$f(x_0 + h) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)] = \frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0) + 0(1)\right]$$

La différence $f(x_0 + h) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ est ainsi du signe $\dfrac{(x - x_0)^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0)\right]$. On distingue ainsi 4 cas, à savoir :

***n* est paire** : Le signe de la différence précédente est celui de $\alpha_n = f^{(n)}(x_0)$. La courbe reste du même coté de sa tangente au voisinage de x_0. En fait, la tangente est en dessous de la courbe $\mathcal{C}_f$ si $\alpha_n > 0$ et au dessus si $\alpha_n < 0$.

***n* est impaire** : Le signe de la différence précédente est celui de $f^{(n)}(x_0)$. Suivant les cas, la courbe franchit sa tangente au point x_0.

4.4 Formule de Taylor-Young et développements limités

Le développement de Taylor avec reste de Young est local. On l'utilise, en général, pour étudier une fonction au voisinage d'un point (développement limité, concavité locale, asymptôte ...). Par contre la formule de Taylor avec reste de Lagrange et son cas particulier la formule des accroissements finis sont utilisées essentiellement dans l'étude globale d'une fonction (sens de variation et concavité sur un intervalle).

On se contente de démontrer la formule de Taylor avec reste de Young sur un intervalle $\mathbb{I}$ contenant 0. On laissera au lecteur le soin d'étendre cette démonstration en un point $x_0 \in \mathbb{I}$.

Théorème 4.4.1 (McLaurin-Young). *Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle $\mathbb{I}$ et que $f^{(n)}(0)$ existe en 0. Alors f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre n suivant*

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)}$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Preuve : Fixons un réel positif non nul x de l'intervalle $\mathbb{I}$ et considérons un nombre H_x qui vérifie

$$f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} - \frac{H_x}{n!}x^n = 0.$$

Pour tout $\ell \in [0, x]$, définissons une fonction auxilliaire de la forme

$$\varphi(\ell) = f(\ell) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}\ell - \frac{f''(0)}{2!}\ell^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\ell^{n-1} - H_x\frac{\ell^n}{n!}.$$

Ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, sont

$$\begin{array}{ccl}
\varphi'(\ell) & = & f'(\ell) - f'(0) - \dfrac{f''(0)}{1!}\ell - \cdots - \dfrac{f^{(n-1)(0)}}{(n-2)!}\ell^{n-2} - H_x\dfrac{\ell^{n-1}}{(n-1)!} \\
\varphi''(\ell) & = & f''(\ell) - f''(0) - \dfrac{f^{(3)}(0)}{1!}\ell - \cdots - \dfrac{f^{(n-1)(0)}}{(n-3)!}\ell^{n-3} - H_x\dfrac{\ell^{n-2}}{(n-2)!} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\varphi^{(n-1)}(\ell) & = & f^{(n-1)}(\ell) - f^{(n-1)}(0) - H_x\ell.
\end{array}$$

Comme $\varphi(0) = \varphi(x) = 0$, d'après le théorème de Rolle il existe $\xi_1 \in]0, x[$ tel que $\varphi'(\xi_1) = 0$. D'autre part, on a $\varphi'(0) = \varphi'(\xi_1) = 0$. On applique une deuxième fois le théorème de Rolle $\xi_2 \in]0, \xi_1[$ tel que $\varphi''(\xi_2) = 0$. On réitère ce procédé jusqu'à l'ordre $n-1$. On trouve $\xi = \xi_{n-1} \in]0, \xi_{n-2}[\subset]0, x[$ tel que $\varphi^{(n-1)}(\xi_{n-1}) = 0$. Ainsi, on a $H_x = \dfrac{\varphi^{(n-1)}(\xi) - \varphi^{(n-1)}(0)}{\xi}$. Ce qui donne $\lim\limits_{x\to 0} H_x = f^{(n)}(0)$. Autrement dit $H_x = f^{(n)}(0) + \varepsilon(x)$ tel que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. ◆

☞ **Exemple 4.4.1** La fonction $f(x) = e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$. Donc $f^{(n)}(x) = e^x$ et alors $f^{(n)}(0) = 1$. Par suite

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x).}$$

En substituant x par $-x$ dans ce développemennt, on obtient le développement de McLaurin avec reste de Young de e^{-x}. Ce qui donne le développement de McLaurin des fonctions $\sinh x$ et $\cosh x$, à savoir

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)\\ \cosh x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x).\end{aligned}$$

☞ **Exemple 4.4.2** La fonction $\varphi(x)=\sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\varphi^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{et}\quad f^{(n)}(0)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ce qui donne

$$\varphi^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & si\ n=2p\\ (-1)^p & si\ n=2p+1.\end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+x^{(2p+2)}\varepsilon(x).}$$

☞ **Exemple 4.4.3** rm La fonction $\phi(x)=\cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\phi^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\qquad \phi^{(n)}(0)=\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Ce qui donne

$$\phi^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^p & si\ \ n=2p\\ 0 & si\ \ n=2p+1.\end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+x^{(2p+1)}\varepsilon(x).}$$

☞ **Exemple 4.4.4** La fonction $x\to \ell n x$ n'est pas définie au point 0 et ne peut avoir un développement au voisinage de 0. Toutefois, on peut appliquer la formule de Taylor-Youg à la fonction $f(x)=\ln(x+1)$ au voisinage de 0. Ainsi

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n} & si\ \ x\neq 0\\ \\ (1)^{n-1}(n-1)! & si\ \ x=0.\end{cases}$$

Donc

$$\boldsymbol{\ell\mathrm{n}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x).}$$

Définition. *Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$. L'écriture*

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

lorsque $x \to 0$, est dite développement limité d'ordre n de f au voisinage de zéro.

Cette définition impose les remarques suivantes :

① Le développement limité d'une fonction à un ordre quelconque, lorsqu'il existe sur un intervalle, est unique.

② Si la fonction f admet un développement limité d'ordre n, alors elle admet un développement au voisinage de 0 d'ordre p avec $0 \leq p \leq n$.

③ Si la fonction f est paire (resp. impaire), les cœfficients d'indice impair α_{2k+1} (resp. α_k), $k \in \mathbb{N}^*$), sont nuls. Remarquer, par exemple, le développement de $x \longrightarrow \cos x$ (resp. $x \longrightarrow \sin x$).

La formule de Taylor-Young nous permet d'écrire le développement limité des fonctions usuelles. Toutefois, si une fonction dont les dérivées sont difficile à compiler au voisinage de l'origine, il est conseillé de l'écrire sous forme de fonctions élémentaires et d'appliquer les opérations sur les développements limités.

☞ **Exemple 4.4.5** La formule de McLaurin avec reste de Young, nous donne au voisinage de 0, les développements limités suivants

$$\boldsymbol{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x).}$$

Si $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, on obtient respectivemet les développements

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1.3.5.\cdots.(2n-3)}{2.4.6.\cdots(2n)}x^n x^n\varepsilon(x)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n}\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6.\cdots(2n)}x^n x^n\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x)\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{1.3.5.\cdots.(2n-1)}{2.4.6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+x^{2n+2}\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Remarque. Malgré la connexion étroite entre les développements limités et les séries de Taylor, on prendra soin de signaler la différence entre les deux notions. La série de Taylor comporte une infinité de terme et donne la valeur de la fonction dans un intervalle de convergence. Par contre le développement limité ne comporte qu'un nombre fini de termes et donne le renseignement que quand la variable tend vers 0.

4.5 Opérations sur les développements limités

Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{I},\mathbb{K})$ deux fonctions dont les développements limités sont

$$\begin{aligned}
f(x) &= \alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n+x^n\varepsilon_1(x)\\
g(x) &= \beta_0+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\cdots+\beta_n x^n+x^n\varepsilon_2(x)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x)=0, i=1,2.$

Somme et produit : Le développement de la somme $f(x)+g(x)$ est

$$f(x)+g(x)=(\alpha_0+\beta_0)+(\alpha_1+\beta_1)x+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)x^n+x^n\varepsilon'(x)$$

avec $\varepsilon'(x)=\varepsilon_1(x)+\varepsilon_2(x)$ et $\lim_{x\to 0}\varepsilon'(x)=0$. Le produit admet le développement suivant

$$f(x).g(x)=\alpha_0\beta_0+(\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)x+\cdots+(\alpha_0\beta_n+\cdots\alpha_n\beta_0)x^n+x^n\varepsilon''(x)$$

où $\lim_{x\to 0}\varepsilon''(x)=0$.

☞ **Exemple 4.5.1** le développement à l'ordre 6 de $x \to \text{tg}\,^2 x$ est

$$\begin{aligned}\text{tg}\,^2 x &= \left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+x^7\varepsilon(x)\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+x^7\varepsilon(x)\right)\\ &= x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+x^6\varepsilon(x). \quad ◆\end{aligned}$$

En fait, la fonction $x \to \text{tg}\,^2 x$ est une fonction paire et alors toutes les puissances impaires disparaissent. On a effectué les produits des monômes de degré inférieure ou égal à 3. ◆

Quotient : On suppose que $\beta_0 = g(0) \neq 0$ et que les fonctions f et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ admettent respectivement au voisinage de 0 les développements limités d'ordre n suivants

$$f(x) = A(x) + x^n\varepsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_i(x) = 0, i = 1,2$. Pour trouver le développement limité du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on effectue la division euclidienne de A par B suivants les puissances croissantes jusqu'à l'ordre n. On obtient ainsi deux polynômes Q et R avec $d^0Q \leq n$ tel que

$$A(x) = B(x)Q(x) + x^{n+1}R(x).$$

Et alors

$$f(x)g(x) = Q(x) + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

☞ **Exemple 4.5.2** Soit la fonction $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ définie sur l'intervalle $]-\pi, 0[\cup]0, +\pi[$. Cherchons son déveleppement à l'ordre 6 au voisinage de 0. Le développment limité de $\sin x$ nous donne

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+x^6\varepsilon(x)}\\ &= 1-u(x)+u^2(x)-u^3(x)+x^6\varepsilon(x)\end{aligned}$$

avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+x^6\varepsilon(x)$. En fait, on a effectué la division euclidienne de 1 par $1+u(x)$. D'où

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} = 1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+\frac{31x^6}{15120}x^6+x^6\varepsilon(x). \quad ◆$$

Composition : Supposons que $f(0) = 0$ c'est à dire que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et que

$$f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + x^n\varepsilon(x), \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

Alors
$$g(f(x)) = \beta_0 + \beta_1 f(x) + \cdots + \beta_n [f(x)]^n + [f(x)]^n \varepsilon(f(x)).$$

Cett expression est une somme de fonctions qui admettent des développements limités au voisiange de 0 à l'ordre n, elle a un sens puisque $\lim_{x\to 0} \varepsilon(f(x)) = 0$.

☞ **Exemple 4.5.3** Soit à développer la fonction composée $f(x) = \sin(\ell n(1+x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. Quand x tend vers 0, $\ln(1+x)$ tend vers 0. Le développement limité de $\sin(\ln(1+x))$ au voisinage de 0 se ramène donc à celui de $\sin u$ au voisinage de 0. Considérons d'abord $u = \ln(1+x)$. Au voisinage de $x = 0$, on a
$$u = \ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x).$$

On voit que si x tend vers 0, alors u tend vers 0. Considérons ensuite l'expression $y = \sin u$. Au voisinage de 0, on a $\sin u = u - \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u)$. En remplaçant u par sa valeur, on trouve
$$\sin \ell n(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x). \quad ◆$$

☞ **Exemple 4.5.4** Développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{\cos x}$ au voisinage de 0. Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, cette fonction $x \to \sqrt{\cos x}$ est définie. Or,
$$\cos x = 1 + u + u\varepsilon(u)$$
avec $u = -\frac{x^2}{2}$. Le développement que $\sqrt{\cos x}$ se présente comme celui d'une fonction composée. Ainsi
$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x} &= \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + u\varepsilon(u) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + x^2 \varepsilon(x). \quad ◆ \end{aligned}$$

4.6 Développements limités généralisés

Au lieu de considérer des fonctions définies dans un intervalle admettent 0 pour point intérieur, on peut considérer des fonctions définies dans un intervalle admettant 0 pour extrémité. De telle fonctions peuvent admettre des développements limités au voisinage de 0.

Supposons que l'intervalle $\mathbb{I}$ contient 0 et soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{I}, \mathbb{K})$ telle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$. Alors f n'admet certainement pas de développements limités au voisinage de O. mais il se peut que $x^k f(x), k \in \mathbb{N}$, tende vers une limite finie α_0 quand x tend vers 0. Ainsi, la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} x^k f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha_0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet un développement limité au voisinage de 0 de la forme

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n + x^n \varepsilon(x), \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Alors

$$f(x) = \alpha_0 1 x^k + \alpha_1 1 x^{k-1} + \cdots + \alpha_n 1 x^{k-n} + x^{n-k} \varepsilon(x), \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On dit que f admet un *développement généralisé* ou *asymptotique* au voisinage de 0.

☞ **Exemple 4.6.1** La fonction $x \to \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ est définie pour $x \neq 0$. Dans ce cas, elle s'écrit

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)}{x - \dfrac{x^3}{6} + x^4 \varepsilon(x)}.$$

Donc

$$\frac{x}{\operatorname{tg} x} = \frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + x^3 \varepsilon(x)} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{24} + x^3 \varepsilon(x).$$

Ce qui donne le développement généralisé de la fonction $x \to \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + x^2 \varepsilon(x), \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0. \quad \blacklozenge$$

On peut aussi développer les fonctions au voisinage de $\pm\infty$, en se ramenant au cas étudié plus haut par le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$.

☞ **Exemple 4.6.2** Développons la fonction $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[2]{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pose $y = \dfrac{1}{t}$, ce qui donne

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \sqrt[3]{1 + 1/y} - \sqrt[3]{1/y} = \sqrt[3]{1/y}\left(\sqrt[3]{1 + 1/y} - 1\right)$$

$$\begin{aligned} &= y^{-1/3}\left(1+\frac{1}{3}y+y\varepsilon(y)-1\right)=\frac{1}{3}y^{2/3}(1+3\varepsilon(y)) \\ &= \frac{1}{3x^{2/3}}-\frac{1}{x^{2/3}}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0. \end{aligned}$$

☞ **Exemple 4.6.3** Développons la fonction suivante lorsque $x \to +\infty$ à l'ordre 3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\exp(\arctan x)$ Posons $u = \dfrac{1}{x}$ qui tend vers 0^+. La fonction f s'écrit

$$f(u) = \frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\exp\left(\arctan\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

Compte tenu de la relation $\arctan u + \arctan\left(\dfrac{1}{u}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ pour $u > 0$ on obtient

$$f(u) = e^{\pi/2}\frac{\sqrt{u^2+1}}{u}\exp\left(\arctan\left(-u\right)\right).$$

Or

$$\frac{\sqrt{u^2+1}}{u} = 1+\frac{1}{2}u^2+\varepsilon(u^3)$$

et puisque $\arctan(-u) == -u + \dfrac{u^3}{3} + \varepsilon(u^3)$, il vient que

$$\exp(\arctan(-u)) = 1-u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+\varepsilon(u^3).$$

Finalement, on a le développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$

$$f(x) = e^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}+\varepsilon\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

Si le développement asymptotique de la fonction f est de la forme

$$f(x) = \alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x^n}+\frac{1}{x^n}+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right), \quad \lim_{x\to\pm\infty}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)=0, \quad \gamma\in\mathbb{R}^*.$$

La courbe Γ_f représentative de f admet comme asymptote la droite au voisinage de l'infini, la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$. La position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le terme $\dfrac{\gamma}{x^n}$. Remarquons que les cœfficients α et β sont donnés par

$$\boxed{\alpha = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad \beta = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-\alpha x].}$$

☞ **Exemple 4.6.4** Soit la fonction $f(x) = e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$. Déterminons son asymptote sous la forme $y = \alpha x + \beta$. On a $\alpha = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{1/x}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = 1$. D'autre part

$$\begin{aligned}
[f(x) - x] &= e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\frac{2}{x}} - 1 \\
&= \frac{1}{u}[e^u\sqrt{1+2u} - 1] \qquad u = \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{u}\left[\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\varepsilon(u^2)\right)\left(1+u-\frac{1}{8}u^2+\varepsilon(u^2)\right) - 1\right]. \\
&= 2 + \frac{11}{8}u + \varepsilon(u).
\end{aligned}$$

Ce qui donne $\beta = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - x] = 2$. L'équation de l'asymptote est alors $y = x + 2$. La position de cette asymptote par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$ est donné par le signe de $f(x) - [x+2] = \dfrac{11}{8x} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ainsi, pour $x \geq 0$ la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de son asymptote. Lorsque x tend vers $-\infty$ la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = -x - 2$ comme asymptote et que la courbe $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de cette asymptote, comme on peut le voir en procédant de le même façon qu'au voisinage de $+\infty$. ◆

Les limites difficiles se présentent en général sous forme indéterminées, les développements limtés fournissent un outil efficace pour les calculer. Il s'agit de remplacer chaque terme par son développememnt limité et appliquer ensuite les règles de calcul sur les développements limités.

4.7 Exercices Corrigés

Exercice 4.7.1. ☞

① Montrer que e est un nombre irrationnel

② Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on a $e^x > x^n n!$. En déduire que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty.}$$

③ En appliquant la formule de McLaurin à la fonction $x \to \ln(x+1)$ pour $x = 1$, montrer que la suite de Riemann (s_n) de terme général $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k$ est convergente et a pour limite $\ell n2$.

Solution. Au voisinage de 0, la formule de McLaurion avec reste de Lagrange, appliquée à la fonction $x \to e^x$ nous donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

① En prenant $x = 1$ on obtient

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

d'où

$$n!e = n! + \frac{n!}{1!} + \cdots + 1 + \frac{e^{\theta}}{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Supposons que e est un nombre irrationnel qui s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ (p et q premiers entre eux). Si on choisi $n \geq q$, l'égalité précédente n'aura pas de sens.

② Pour $x \geq 0$, on a $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$. Soit p un entier tel que $p > \alpha$. On a alors

$$e^x x^{\alpha} > \frac{1}{p!} \frac{x^p}{x^{\alpha}} = \frac{1}{p!} x^{p-\alpha}, \qquad p > \alpha.$$

Ce qui entraine $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{p-\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^{\alpha}} = +\infty$.

③ La formule de McLaurin avec reste de Lagrange appliquée à la fonction $x \to \ell n(x+1)$ au voisinage de 0 et en posant $x = 1$, on obtient

$$\ell n2 = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}.$$

Donc $|s_n - \ell n2| \leq \dfrac{1}{n+1}$. Ce qui donne $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \ell n2$.

Exercice 4.7.2. ☞

① Montrer que

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} < \ell n(1+x) < x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.}$$

② Soit la suite définie par : $u_n = \prod_{k+1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$, $n \geq 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \ell n u_n$ et $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Solution.

① La formule de McLaurin avec reste de Young, au voisinage de 0 et à l'ordre 2, appliquée à la fonction $x \to \ell n(1+x)$, nous donne

$$\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon(x).$$

D'où, pour $x \geq 0$, on a $\ell n(1+x) < x$. D'autre part, à l'ordre 3, on a $\ell n(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$. Comme $x > 0$, on obtient $\ell n(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

② On a

$$\ell n u_n = \sum_{k=1}^{n} \ell n\left(1 + kn^2\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Et

$$\ell n u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{2n^4} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc $\frac{1}{2} \leq \ell n u_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Ce qui donne $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = \frac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{e}$.

Exercice 4.7.3. ☞

Trouver les développements limités au voisinage de 0, des fonctions

① $f(x) = \sin x \cos x$ à l'ordre 4 et $g(x) = \sin(x + x^3)$ à l'ordre 7

① $h(x) = \dfrac{1}{2}(1 + e^x)^n$ à l'ordre 2 et $k(x) = \sqrt{e^x - x - 1}$ à l'ordre 4.

② Trouver le développement de $g(x) = \dfrac{\ell \text{n} x}{x^2}$ au voisinage du point 1 à l'ordre 4.

Solution.

① La fonction $x \to f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{2}$. Le développement de $x \to \sin 2x$, nous donne au voisinage de 0

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + x^4\varepsilon(x)\right) = x - \frac{2x^3}{3} + x^4\varepsilon(x).$$

Alors $\sin x \cos x = x - \dfrac{2x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$.

② Le développement de la fonction $x \to \sin x$ au voisinage de 0 par rapport à $x + x^3$, nous donne

$$\begin{aligned}
\sin(x + x^3) &= x(1 + x^2) - \frac{x^3(1 + x^2)^3}{6} + \frac{x^5(1 + x^2)^5}{120} - \frac{x^7(1 + x^2)^7}{5040} + x^7\varepsilon(x) \\
&= x + \frac{5x^3}{6} - \frac{59x^5}{120} - \frac{2311x^7}{5040} + x^7\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

③ Le développement de la fonction $x \to e^x$ au point $x = 0$ s'écrit à l'ordre 2

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Alors, en posant $X = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right)$, on obtient

$$\frac{1}{2}(1 + e^x)^n = \frac{1}{2}\left(2 + x + \frac{x^2}{2} + \varepsilon(x^2)\right)^n = 2^{n-1}\left(1 + X\right)^n.$$

Par rapport à X, le développement devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1 + e^x)^n &= 2^{n-1}\left(1 + n\frac{X}{2} + n\frac{X^2}{4} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{X^2}{4} + X^2\varepsilon(X)\right) \\
&= 2^{n-1}\left(1 + n\frac{x}{2} + n\frac{x^2}{4} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)\right) \\
&= 2^{n-1}\left(1 + n\frac{x}{2} + \frac{n(n+1)x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)\right).
\end{aligned}$$

④ Supposons que cette fonction se développe à l'ordre 4 au voisinage de 0 sous la forme
$$\sqrt{e^x - x - 1} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + x^4 \varepsilon(x).$$
Les cœfficients a_1, a_2, a_3 et a_4 sont à déterminer. Remarquons que
$$a_0 = \lim_{x \to 0} \sqrt{e^x - x - 1} = 0 \quad \text{et} \quad a_1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^x - x - 1}}{x} = \sqrt{2}2.$$
Et par identification, on trouvera
$$a_2 = \frac{\sqrt{2}}{12}, \qquad a_3 = \frac{\sqrt{2}}{72} \qquad \text{et} \qquad a_4 = \frac{\sqrt{2}}{540}.$$
D'où
$$\sqrt{e^x - x - 1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{270} + \varepsilon(x^4) \right).$$

⑤ Après le changement de variable, $X = x - 1$, on est conduit à calculer le développement limité par rapport à x au voisinage de 0; $\varphi(X) = \dfrac{\ell\text{n}(1+X)}{(1+X)^2}$. Suposons que ce développemet se présente ainsi
$$\varphi(X) = a_0 + a_1 X + a_1 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + X^4 \varepsilon(X).$$
Alors $a_0 = \varphi(0) = 0$ et $\ell\text{n}(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + X^4 \varepsilon(X)$. D'où
$$(a_0 + a_1 X + a_1 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 + \varepsilon(X^4))(1 + 2X + X^2) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + X^4 \varepsilon(X).$$
Par identification, on a $a_1 = 1$, $a_2 = -\dfrac{5}{2}$, $a_3 = \dfrac{13}{3}$, $a_4 = -\dfrac{77}{12}$. Soit que
$$g(x) = x - \frac{5}{2} x^2 + \frac{13}{3} x^3 - \frac{77}{12} x^4 x^4 \varepsilon(x).$$

Exercice 4.7.4. ☞ Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x(1 + \cos x) - 2\text{tg}\, x}{2x - \sin x - \text{tg}\, x}.$$
Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Solution. En remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs développements limités au voisinage de 0, on obtient

$$f(x) = \frac{x\left(2 - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)\right) - 2\left(x + \dfrac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)}{2x - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) - \left(x + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right)} = \frac{-\dfrac{7}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)()}{-\dfrac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)}.$$

D'où $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 7$.

Exercice 4.7.5. ☞ Trouver les développements limités à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions f et g définies (dans des domaines convenables) par

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{\sin x} \qquad \text{et} \qquad x \longrightarrow g(x) = \sqrt{1 + \sin x}.$$

Solution. Au voisinage de 0 et à l'ordre 4, les développements limités de $\sin x$ et $\dfrac{1}{1+u}$ sont respectivement $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$ et $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$. Donc

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + x^4\varepsilon(x)} = \frac{1}{1+u}$$

avec $u = -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + x^4\varepsilon(x)$. Il vient que

$$\frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4\varepsilon(x)\right) + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^4\varepsilon(x)\right)^2 + x^4\varepsilon(x).$$

Le développement limité de f au voisinage de 0 est

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + x^4\varepsilon(x).$$

Pour la fonction g, on a d'abord le développement suivant au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} - \frac{5y^4}{128} + y^4\varepsilon(y).$$

Prenons $y = \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \varepsilon(x^4)$. Après le calcul, on obtient

$$\sqrt{1 + \sin x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + \frac{x^4}{384} + x^4\varepsilon(x).$$

Exercice 4.7.6. ☞ Trouver le développement limité de :

① $f(x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4 et $g(x) = (1+x)^{1/x}$ en 0 à l'ordre 3.

① $h(x) = x\text{cotg}\, x$ en 0 à l'ordre 5.

Solution. On effectue un changement de variable pour se ramener au voisinage de 0.

① On se ramène dans le premier développement au voisinage de 0 par un changement de variables. Avec le changement de variable $t = x - \frac{\pi}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\Big(1 - \cos x\Big) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos t}{2} - \sqrt{3}\frac{\sin t}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos t}{4} + \sqrt{3}\frac{\sin t}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{1}{8}t^2 - \frac{\sqrt{3}}{24}t^3 - \frac{1}{96}t^4 + t^4\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

Donc

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}t + \frac{1}{8}t^2 - \frac{\sqrt{3}}{24}t^3 - \frac{1}{96}t^4 + t^4\varepsilon(t), \qquad t = x - \frac{\pi}{2}.$$

② Posons $g(x) = \frac{1}{x}\ell\text{n}(1+x)$. Alors $f(x) = (1+x)^{1/x} = e^{g(x)}$. Comme $g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon(x)$. Alors

$$g(0) = 1, \quad g'(0) = -\frac{1}{2}, \quad g^{(2)}(0) = \frac{2}{3} \text{ et } g^{(3)}(0) = -\frac{3}{2}.$$

La fonction f est dérivable en 0. En écrivant ses dérivées en fonction de celles de g, on obtient

$$\begin{aligned}
f(0) &= e^{g(0)} = e \\
f'(0) &= f(0)g'(0) = -e2 \\
f^{(2)}(0) &= f'(0)g'(0) + f(0)g^{(2)}(0) = \frac{11e}{12} \\
f^{(3)}(0) &= f^{(2)}(0)g'(0) + 2f'(0)g^{(2)}(0) + f(0)g^{(3)}(0) = -\frac{63e}{24}.
\end{aligned}$$

Or, $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2}f^{(2)}(0) + \dfrac{x^3}{6}f^{(3)}(0) + x^3\varepsilon(x)$. Et alors

$$(1+x)^{1/x} = e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3\right) + \varepsilon(x^3).$$

③ La fonction $f(x) = x\text{cotg}\, x$ est paire et s'écrit au voisinage à l'ordre 4 de 0 sous la forme $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + x^5\varepsilon(x)$. Ainsi, on a $a_0 = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$. D'autre part, on a $f(x)\sin x = x\cos x$. Ce qui donne, en remplaçant chaque terme par son développement limité

$$\left(1 + a_2x^2 + a_4x^4 + x^5\varepsilon(x)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\varepsilon(x)\right) = x\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\varepsilon(x)\right).$$

Par identification des deux membres, on calcul les cœfficients restants, et on obtient

$$x.\text{cotg}\, x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + x^5\varepsilon(x).$$

Exercice 4.7.7. ☞ Etudier suivant les valeurs du paramètre réel α, la limite : $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{\sin x} - \sqrt{\text{sh}\, x})x^\alpha$.

Solution. Notons par $\varphi(x)$ l'expression sous le signe limite. En multipliant le numérateur et le dénominateur de φ par l'expression $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\text{sh}\, x}$, on obtient le développement du numérateur

$$\sin x - \text{sh}\, x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \varepsilon x^3(x)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)\right) = -\frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x).$$

D'autre part, le dénominateur se développe ainsi

$$x^\alpha\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\text{sh}\, x}\right) = x^\alpha\left(\sqrt{x + \varepsilon(x)} + \sqrt{x + \varepsilon(x)}\right) = 2x^{\alpha + \frac{1}{2}}.$$

Donc $\varphi(x) \simeq -\dfrac{1}{6}x^{-\alpha + \frac{5}{2}}$. Suivant le paramètre α, on a les cas suivants : Si $\alpha = \dfrac{5}{2}$, la limite est $-\dfrac{1}{6}$. Si $\alpha > \dfrac{5}{2}$, on a $x^{\alpha - 52} \to 0^+$, la limite sera $-\infty$. Si $\alpha < \dfrac{5}{2}$, on a

$x^{\alpha-\frac{5}{2}} \to +\infty$, la limite est donc 0. Ainsi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{\operatorname{sh} x}}{x^\alpha} = \begin{cases} -\dfrac{1}{6} & \text{si} \quad \alpha = \dfrac{5}{2} \\ -\infty & \text{si} \quad \alpha > \dfrac{5}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \alpha < \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Exercice 4.7.8. ☞ Trouver les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}(2^{1/x} + 3^{1/x})\right)^{\ell n x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh\sqrt{x^2+1}}{e^{ax}}, \ (a \in \mathbb{R}).$$

De même

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}.$$

Solution. Dans chaque question, on détermine tout d'abords la forme de l'indétermination.

① Dans la première limite, on obtient la forme indétermée 1^∞. Posons $t = \dfrac{1}{x}$, qui tend vers 0^+ quand $x \to +\infty$ et

$$\ell n \left(\frac{1}{2}\left(2^{1/x} + 3^{1/x}\right)\right)^{\ell n x} = -\ell n t \ \ell n \frac{1}{2}\left(2^t + 3^t\right).$$

Or, $2^t = e^{t\ell n 2} = 1 + t\ell n 2 + \varepsilon(t)$ et $3^t = e^{t\ell n 3} = 1 + t\ell n 3 + \varepsilon(t)$ d'où

$$\frac{1}{2}(2^t + 3^t) = 1 + \frac{t}{2}(\ell n 2 + \ell n 3) + \varepsilon(t).$$

Il vient que lorsque $t \to 0$, on a

$$\ell n \left(\frac{1}{2}(2^t + 3^t)\right)^{-\ell n t} \simeq -\frac{1}{2}(\ell n 2 + \ell n 3) t \ell n t.$$

Or, $t\ell n t \to 0$ quand $t \to 0$. La limite est $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}(2^{1/x} + 3^{1/x})\right)^{\ell n x} = 1$.

② Posons $u = \sqrt{x^2+1}$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-u} = 0$ et $\sinh u = \dfrac{e^u - e^{-u}}{2} \simeq \dfrac{e^u}{2}$, lorsque $x \to +\infty$. La limite cherchée est celle de

$$\frac{1}{2}e^{-u-ax} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x^2+1}-ax} = \frac{1}{2}e^{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-a\right)}.$$

Mais à l'infini $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 et alors $\dfrac{1}{2}e^{\sqrt{x^2+1}-ax} \simeq \dfrac{1}{2}e^{x(1-a)}$. Ce qui nous amène à considérer les cas suivants : Si $a > 1$, l'exponentielle tend vers $-\infty$ et la limite cherchée est 0. Si $a < 1$, l'exponentielle tend vers $+\infty$ et la limite cherchée est $+\infty$. Si $a = 1$, au voisinage de $x = 0$, on a le développement

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = 1 + 12x^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Donc, lorsque $x \to +\infty$, on a l'équivalence $x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{1/2} - x \simeq \dfrac{1}{2x}$. La limite cherchée est alors $\dfrac{1}{2}$.

③ En récapitulant

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh\sqrt{x^2+1}}{e^{ax}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a < 1 \end{cases}$$

④ Par linéarisation trigonométrique du dénominateur, on a

$$\begin{aligned} \sin x(\cos 2x - \cos x) &= -2\sin x \, \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ \operatorname{tg} x - \sin x &= \sin x \left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right). \end{aligned}$$

Au voisinage de 0, on a les équivalences

$$\sin x \simeq x \quad \text{et} \quad 1 - \cos x \simeq \frac{x^2}{2}.$$

Par suite, la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x(\cos 2x - \cos x)} = -3$.

⑤ La différence de deux carrés et la linéarisation trigonométrique nous donnent

$$\sin^2 x - \sin^2 a = (\sin x - \sin a)(\sin x + \sin a)$$

$$= \quad 4\sin\frac{x+a}{2}\,\cos\frac{x-a}{2}\,\sin\frac{x-a}{2}\,\cos\frac{x+a}{2}.$$

Au voisinage de a, on a $\sin\frac{x-a}{2} \simeq \frac{x-a}{2}$. Alors $\lim_{x\to a}\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2-a^2} = \frac{\sin 2a}{2a}$.

Exercice 4.7.9. ☞ Trouver les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)+b\sin\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x}.$$

De même

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^{x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\,(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}.$$

Solution. On remplace chaque expression par son développement.

① En remplaçant le numérateur et le dénominateur par leurs développements limités au voisinage de 0, on trouve $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ et $x(1-\cos x) = \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$. D'où $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{2}{3}$.

② En posant $t = \frac{1}{x}$ et en développant par rapport à t au voisinage de 0, on obtient $\cos\frac{a}{x} + b\sin\frac{a}{x} = \cos(at)+b\sin(at) = 1+abt+\varepsilon(t)$. Donc $\ell\text{n}\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)+b\sin\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x} = \frac{1}{t}\ell\text{n}(1+abt+\varepsilon(t)) = \left(\frac{1}{t}\right)(abt+\varepsilon(t))$. Cette dernière expression tend vers ab lorsque t tend vers 0. Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)+b\sin\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x} = e^{ab}.$$

③ Posons $t = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, t tend vers 0. Développons le numérateur au voisinage de 0, il vient que

$$\begin{aligned} a^{1/x} &= a^t = e^{t\ell\text{n}a} = 1 + t\ell\text{n}a + \varepsilon(t)\\ b^{1/x} &= b^t = e^{t\ell\text{n}b} = 1 + t\ell\text{n}b + \varepsilon(t)\end{aligned}$$

$$a^{1/x} = c^t = e^{t\ell nc} = 1 + t\ell nc + \varepsilon(t).$$

Donc

$$\begin{aligned}\ell n \left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x &= x\ell n\frac{1}{3}\left(a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}\right) \\ &= \frac{1}{t}\ell n\left(1+\ell n(abc)\frac{t}{3}+\varepsilon(t)\right)\end{aligned}$$

Cette dernière expression est équivalente à $\frac{1}{3}\ell n(abc)$. Donc

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{1/x}+b^{1/x}+c^{1/x}}{3}\right)^x = \sqrt{abc}.$$

④ Posons $y = (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$, on a $\ell ny = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \ell n(\cos x)$. Or, $\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{x} + \varepsilon(x)$ et

$$\ell n(\cos x) = \ell n\left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)\right) = -\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x).$$

D'où $\lim\limits_{x\to 0}\ell ny = -\frac{1}{2}$. Et ainsi $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Exercice 4.7.10. ☞ Soit $f(x) = \frac{1-\cos x}{1-\cos(\sin x)}$.

① En quels points, la fonction f est-elle définie ? continue ?

② Montrer qu'on peut prolonger f par continuité aux points $x_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Solution.

① La fonction f n'est pas définie pour tout x tel que

$$1-\cos(\sin x) = 0 \iff \sin x = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Or, $|\sin x| \le 1$ et $|2k\pi| \le 1$, c'est à dire $k = 0$ et $\sin x = 0$ soit que $x \in \pi\mathbb{Z}$. Donc f est définie pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$. La fonction f est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions continues sur ce domaine.

② Soit $x_0 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un certain $k_0 \in \mathbb{Z}$, on a $x_0 = 2k_0\pi$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$, posons $t = x - x_0$ donc $x = t + 2k_0\pi$ et la fonction f s'écrit $f(x) = \dfrac{1-\cos t}{1-\cos(\sin t)}$. Or, lorsque x tend vers x_0 tel que $x \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $t \to 0$ avec $t \notin \pi\mathbb{Z}$. Au voisinage de 0, on a

$$f(x) = \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin^2\left(\dfrac{1}{2}\sin t\right)} \simeq \frac{t^2}{\sin^2 t} \simeq \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos x}{1-\cos(\sin x)} = 1$. On peut ainsi prolonger la fonction f par continuité sur $2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 4.7.11. ☞ Donner le développement limité de $f(x) = (\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x}$ au voisinage de $x = \dfrac{\pi}{4}$ (jusqu'à l'ordre 4).

Solution. Posons $x = \dfrac{\pi}{4} + z$, on donnera un développement limité de $f(x)$ au voisinage de $z = 0$. La fonction f s'écrit $f(x) = (\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x} = e^{\mathrm{tg}\ 2x \ell\mathrm{ntg}\ x} = e^u$, où $u = \mathrm{tg}\ 2x\ \ell\mathrm{ntg}\ x$. Soit encore

$$\begin{aligned}
u &= \mathrm{tg}\ \left(\frac{\pi}{2} + 2z\right) \ell\mathrm{n}\frac{1+\mathrm{tg}\ z}{1-\mathrm{tg}\ z} = -\frac{1}{\mathrm{tg}\ 2z}\ \Big(\ell\mathrm{n}(1+\mathrm{tg}\ z) - \ell\mathrm{n}(1-\mathrm{tg}\ z)\Big) \\
&= -\frac{1}{\mathrm{tg}\ 2z}\ \left(2\mathrm{tg}\ z + \frac{2}{3}\mathrm{tg}\ ^3 z + \frac{2}{5}\mathrm{tg}\ ^5 z + \mathrm{tg}\ ^5 z\ \varepsilon(z)\right) \\
&= -\frac{2z + \frac{4}{3}z^3 + \frac{4}{3}z^5 + z^6\ \varepsilon(z)}{2z + \frac{8}{3}z^3 + \frac{64}{15}z^5 + z^6\ \varepsilon'(z)} \\
&= -\frac{1 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{2}{3}z^4 + z^5\ \varepsilon(z)}{1 + \frac{4}{3}z^2 + \frac{32}{15}z^4 + z^5\ \varepsilon'(z)} \\
&= -1 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{26}{45}z^4 + z^4\ \varepsilon''(z).
\end{aligned}$$

D'où

$$(\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x} = \exp\left(-1 + \frac{2}{3}z^2 + \frac{26}{45}z^4\right) = \frac{1}{e}\ \exp\left(\frac{2}{3}z^2 + \frac{26}{45}z^4\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{3}z^2+\frac{26}{45}z^4+\frac{2}{9}z^4+\varepsilon(z^5)\right) \\ &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{2}{3}z^2+\frac{4}{5}z^4++\varepsilon(z^5)\right). \end{aligned}$$

Il suffit alors de remplacer z par $x-\frac{\pi}{4}$ pour avoir le développement demandé.

Exercice 4.7.12. ☞ Quel est le développement limité à l'ordre 3 de

$$f(x)=(1+x)^{1/x}=\exp\left(\frac{1}{x}\right)\ell\text{n}(1+x).$$

① En déduire la limite de $(1+x)^{1/x}$ quand $x\to 0$.

② Donner la limite de la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quand $n\to+\infty$.

Solution. Au voisinage de 0, on a $\ell\text{n}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)$. Donc

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{1}{x}\ell\text{n}(1+x)\right) &= \exp\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+x^4\,\varepsilon(x)\right) \\ &= e\,\exp\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+x^4\,\varepsilon(x)\right) \\ &= e\,\left(1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{6}\frac{x^3}{8}+x^3\,\varepsilon(x)\right). \end{aligned}$$

Enfin,

$$(1+x)^{1/x}=e-\frac{e}{2}x+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{10}x^2-\frac{7e}{10}x^3+\varepsilon(x^3).$$

Ce qui donne $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. On pose maintenant $x=\frac{1}{n}$ et on trouvera que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$.

Exercice 4.7.13. ☞ Calculer les limites suivantes

①
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}, \qquad \text{et} \quad \lim_{x\to0}\left(1+a\text{tg}\,^2x\right)^{1x\sin x}$$

②
$$\text{et} \quad \lim_{x\to0^+}[\sin x]^{1\ell\text{n}x} \qquad \text{et} \quad \lim_{x\to0}\frac{\ell\text{n}\cos 2x}{x\sin x}.$$

③
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2-x}{1-x+\ell\text{n}x}\right) \qquad \text{et} \quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\ell\text{n}(1+e^x)}{x^2}\right)$$

④
$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\ell\text{n}\left(2.\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\right).$$

Solution.

① L'expression sous la limite s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x} &= \exp\left[2x\ell\text{n}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)\right] = \exp\left[2x\ell\text{n}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)\right]\\ &= \exp\left[2x\left(\frac{2}{2x-1}+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\ &= \left(\frac{4x}{2x-1}+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

La limite cherchée est alors $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}=e^2$.

② L'expression sous le symbole limite s'écrit :

$$\left(1+a\text{tg}\,^2x\right)^{1x\sin x}=\exp\left(\frac{1}{x\sin x}\ell\text{n}(1+a\text{tg}\,^2x)\right).$$

D'autre part, on a $\text{tg}\,x=x+\varepsilon(x)$, $\text{tg}\,^2x=x^2+\varepsilon(x^2)$ et $\sin x=x+\varepsilon(x)$. Donc $\ell\text{n}(1+a\text{tg}\,^2x)=ax^2+\varepsilon(x^2)$ et $x\sin x=x^2+\varepsilon(x^2)$. D'où

$$\left(1+a\text{tg}\,^2x\right)^{1}x\sin x=\exp\left(\frac{ax^2+\varepsilon(x^2)}{x^2+\varepsilon(x^2)}\right)=\exp\left(\frac{a+\varepsilon(x)}{1+\varepsilon(x)}\right).$$

Par suite $\lim_{x\to0}[1+a\text{tg}\,^2x]^{\frac{1}{x\sin x}}=e^a$.

③ On a $\ell\text{n}(\sin x) = \ell\text{n}[(x(1+\varepsilon(x))] = \ell\text{n}x + \ell\text{n}(1+\varepsilon(x))$. Donc

$$\begin{aligned}(\sin x)^{1/\ell\text{n}x} &= e^{(1/\ell\text{n}x)\ell\text{n}(\sin x)} = \exp\left(1 + \frac{\ell\text{n}(1+\varepsilon(x))}{\ell\text{n}x}\right)\\ &= e.\exp\left(\frac{\varepsilon(x)}{\ell\text{n}x}\right).\end{aligned}$$

Soit que $\lim\limits_{x\to 0^+} [\sin x]^{1/\ell\text{n}x} = e$.

④ Au voisinage de 0, on a $\cos 2x = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$. Posons $u = -2x^2 + \varepsilon(x^2)$. Alors $\ell\text{n}[\cos 2x] = \ell\text{n}(1+u) \simeq u$. Or $x\sin x \simeq x^2$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ell\text{n}\cos 2x}{x\sin x} = -2.$$

⑤ Posons $x - 1 = u$ donc $x = 1 + u$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{x^2-x}{1-x+\ell\text{n}x} &= \frac{(1+u)u}{-u+\ell\text{n}(1+u)} = \frac{(1+u)u}{-u+\left(u-\dfrac{u^2}{2}+u^2\varepsilon(u)\right)}\\ &= \frac{(1+u)}{-1+\left(1-\dfrac{u}{2}+\varepsilon(u)\right)}\\ &= \frac{(1+u)}{-\dfrac{u}{2}+\varepsilon(u)}.\end{aligned}$$

Quand u tend vers 0, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers tend 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x^2-x|}{1-x+\ell\text{n}x} = \pm\infty$. Mais ce développement limité est, pour u assez petit, du signe de son premier terme $-\dfrac{u}{2}$ donc inférieure à 0 pour $u \to 0^+$ c'est-à-dire $x \to 0^+$. Dans ce cas $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-x}{1-x+\ell\text{n}x} = -\infty$. De même $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-x}{1-x+\ell\text{n}x} = +\infty$.

⑥ On considère deux cas : Si $x \to -\infty$ On a $e^x \to 0$ et $\ell\text{n}(1+e^x) \to 0$. Et donc $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ell\text{n}(1+e^x)}{x^2} = 0$. Si $x \to +\infty$. On va se ramener à une situation analogue en mettant e^x en facteur dans la parenthèse $(1+e^x) = e^x\left(e^{-x}+1\right)$. Et alors

$$\frac{\ell\text{n}(1+e^x)}{x^2} = \frac{x+\ell\text{n}(e^{-x}+1)}{x^2} = x + \varepsilon(1)x^2 \simeq \frac{1}{x}.$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ell\text{n}(1+e^x)}{x^2}\right) = 0.$

⑦ Le développement de $1 - x\cos x$, nous donne

$$\frac{1}{x}\ell\text{n}\left(2.\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \ell\text{n}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \varepsilon(x^2)\right) \simeq -\frac{x}{12}.$$

Alors $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ell\text{n}\left(2.\frac{1-\cos x}{x^2}\right)\right) = 0.$

Exercice 4.7.14. ☞

① Déterminer la limite quand x tend vers 0 de :

$$\frac{\text{cotg } x - \sin x}{\text{tg } x - \arcsin x}.$$

② Détermier quand x tend vers 0 la limite ℓ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x}\ell\text{n}\frac{e^x - 1}{x}$$

et celle de l'expression :

$$\frac{f(x) - \ell}{x}.$$

③ Déterminer les cœfficients a et b pour que la fonction g définie par :

$$g(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

soit un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible quand $x \longrightarrow 0$ et déterminer alors la partie principale de g.

④ Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ de la fonction h définie par

$$h(x) = x\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right).$$

Solution.

① On écrit la formule de McLaurin, du numérateur et du dénominateur, à l'ordre 3

$$\begin{aligned}
\arctan x - \sin x &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \varepsilon(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) = -\frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x) \\
\operatorname{tg} x - \arcsin x &= \left(x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)\right) = \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-1/6+\varepsilon(1)}{+1/6+\varepsilon(1)}\right) = -1.$$

② Le développement limité de la fonction $x \to e^x$, nous donne

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\ell n\left(\frac{e^x-1}{x}\right) &= \ell n\left\{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)\right)\right\} \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + x^2\varepsilon(x) \\
&= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + x^2\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

D'où $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{24} + \varepsilon(x)$ et $\ell = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$. Il vient que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{24}.$$

③ On a les développements suivants

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + x^6\varepsilon(x) \\
\frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + x^6\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

La fonction $g(x)$ se développe sous la forme

$$g(x) = -\left(\frac{1}{2} + (a-b)\right]x^2 + \left[\frac{1}{24} + b(a-b)\right)x^4 - \left(\frac{1}{720} + b^2(a-b)\right)x^6 + x^6\varepsilon(x).$$

Elle sera un infiniment petit d'ordre aussi élevé que possible (ici d'ordre 6) quand x tend vers 0, si $a - b = -\frac{1}{2}$ et $b(a-b) = -\frac{1}{24}$ ce qui donne $b = \frac{1}{12}$ et $a = -\frac{5}{12}$ et alors $g(x) = \frac{3x^6}{1440} + x^6\varepsilon(x)$.

④ Posons $X = \dfrac{1}{x}$, alors $X \to 0$ et on a

$$H(X) = h(x) = h\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X}\left(\frac{1}{e} - (1+X)^{-1/X}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned}(1+X)^{-1/X} &= e^{-(1/X)\ell\mathrm{n}(1+X)} = e^{-1+\frac{x}{2}+\varepsilon(X)} = e^{-1}\ e^{(X/2)+\varepsilon(X)} \\ &= e^{-1}\left(1 + X2 + \varepsilon(X)\right).\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\dfrac{1}{2e}$.

Exercice 4.7.15. ☞ On veut étudier la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2-3x+2}$ au voisinage de l'infini $+\infty$.

① En écrivant $\sqrt{x^2-3x+1} = x\sqrt{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}} = x\sqrt{1+u}$ (pour $x > 0$) est en développant par rapport à u, montrer que : $\sqrt{x^2-3x+1} = \alpha x + \beta + \dfrac{\gamma}{x} + \dfrac{1}{x} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand x tend $+\infty$. Les constantes α, β et γ sont à déterminer.

② Développer $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ à l'ordre 2 lorsque x tend vers $+\infty$, (on posera $X = \frac{1}{x}$). En déduire que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$, quand x tend $+\infty$ et que la courbe C_f possède une asymptôte que l'on déterminera.

③ Trouver l'asymptôte de $y = f(x)$ pour x vers $-\infty$.

Solution. On ramène le développement à l'infini à un développement au voisinage de zéro en effectuant le changment de variable $x = \dfrac{1}{t}$.

① Quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0$ et on a le développement

$$1 + e^{1/x} = 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \quad 2\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{1/x}} &= \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)+\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)^2+\frac{1}{x^4}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{24x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right].\end{aligned}$$

Le développement limité de $f(x)$ au voisinage de l'infini est alors

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{48x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ est une asymptôte au graphe de $f$et se situe au dessous de celui-ci puisque $f(x)-y=\frac{1}{48x^2}+\frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)>0$ pour les valeurs suffisament petites de $\frac{1}{x}$.

② En effectuant le même changement de variable, on obtient le développement asymptôtique $\varphi(x)=x+2+\frac{3}{2x}+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$. La droite d'équation $y=x+2$ est donc une asymptôte et comme $f(x)-(x+2)=\frac{3}{2x}+\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$. Alors, Pour x voisinage de $+\infty$, la courbe est au dessus de l'asymptôte. Pour x voisinage de $-\infty$, la courbe est au dessous de l'asymptôte.

4.8 Problèmes Corrigés

Les résultats des problèmes qui suivent peuvent être considérés comme un prolongement et une suite logique du cours. Leurs compréhension est, de ce fait, indispensable.

Énoncé 1 :

Chercher

$$\lim_{x\to 1/2}(2x^2-3x+1)\text{tg }(\pi x), \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{1/\sin^2 x}.$$

Solution :

La première limite on a une indétermination de la forme $0.\infty$. Pour lever l'indétermination, nous allons utiliser un développement limité après avoir posé $x = u + \frac{1}{2}$ pour se ramener à une variable u tendant vers 0. Ainsi, on a

$$(2x^2-3x+1)\text{tg }(\pi x) = -[2u^2-u]\frac{1}{\text{tg }\pi u} = \frac{1}{\pi} - \frac{2u}{\pi} + \varepsilon(u^2)$$

car, u tend vers 0, alors $\text{tg }(\pi u) = \pi u + \varepsilon(u^2)$. D'où $\lim_{x\to 1/2}(2x^2-3x+1)\text{tg }(\pi x) = \frac{1}{\pi}$. Pour la deuxième limite, on a une indétermination de la forme 1^∞. On prend le logarithme de l'expression sous le signe limite. Ce qui nous amène à calculer la limite $\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin^2 x}\ln(\cos x)$. On remplace chaque terme par son développement limité. Enfin, on obtient que $\lim_{x\to 0}(\cos^2 x)^{1/\sin^2 x} = \frac{1}{e}$. ◆

Énoncé 2 :

En utilisant la méthode des équivalents, trouver les limites des expressions suivantes pour $x \to 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(\sin^3 x^2)}{\sin^3(\sin^2 x)}, \quad g(x) = \frac{1-\cos(x^2+\text{tg }^2 x)}{\sin(x^3\sin x)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{\text{tg }(3x^4+\sin^4 x)}{\sin(x^4+\sin^6 x)}.$$

Solution :

Au voisinage de 0, on a les équivalents suivants $\sin^3(x^2) \simeq (x^2)^3 = x^6$ et $\sin^3(\sin^2 x) \simeq (x^2)^3 = x^6$. Donc $f(x) = \frac{\sin(\sin^3 x^2)}{\sin^3(\sin^2 x)} \simeq \frac{x^6}{x^6}$. D'où $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Remarquons que $1-\cos(x^2+\text{tg }^2 x) = 2\sin^2\left(\frac{x^2+\text{tg }^2 x}{2}\right)$. Posons $u = \frac{1}{2}(x^2+\text{tg }^2 x)$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc $\sin u \simeq u$ et $\sin^2 u \simeq u^2$. Ainsi

$$1 - \cos(x^2 + \text{tg}\,^2 x) \simeq 2\left(\frac{x^2 + \text{tg}\,^2 x}{2}\right)^2 \simeq 2x^4.$$

Comme $x^3 \sin x \simeq x^4$, alors $g(x) \simeq \dfrac{2x^4}{x^4}$. D'où $\lim_{x\to 0} g(x) = 2$.
Posons $v(x) = 3x^4 + \sin^4 x$ qui tend vers 0 avec x, donc $\text{tg}\, v \simeq v$ au voisinage de 0. De plus, on peut écrire v sous la forme $v(x) = x^4\left(3 + \dfrac{\sin x}{x}\right)$. Comme au voisinage de 0, $\dfrac{\sin x}{x} \simeq 1$, alors $\lim_{x\to 0}\left(3 + \dfrac{\sin x}{x}\right) = 4$ et $v(x) \simeq 4x^4$. D'autre part, on a au voisinage de 0, $w(x) = x^4 + \sin^6 x = x^4\left[1 + x^2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^6\right] \simeq x^4$. Alors $h(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)} \simeq \dfrac{4x^4}{x^4}$. La limite cherchée sera $\lim_{x\to 0} h(x) = 4$.

Énoncé 3 :

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

① Par application de la formule de Taylor. Calculer

$$\ell = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

② On suppose de plus que la fonction f vérifie

$$f(x) + f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f' est alors croissante.

③ Par application de la formule des acroissements finis, montrer la réciproque de la question précédente.

Solution :

① La fonction f est deux fois dérivable, on peut appliquer la formule de Taylor et ainsi, pour θ_1 et θ_2 tels que $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x+\theta_1 h) \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x-\theta_2 h). \end{aligned}$$

Soit
$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = \frac{f''(x+\theta_1 h)+f''(x-\theta_2 h)}{2}.$$

La seconde dérivée de f étnt continue, on peut écrire

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

② On a $f(x+h)+f(x-h) \geq 2f(x)$ et alors

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \geq 0$$

d'où $f''(x) \geq 0$ et f' est croissante.

③ On suppose que f' est croissante. Prenons par exemple $x \geq y$, alors

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

On est amené à calculer la quantité $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. Par application de la formule des accroissements finis, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{x-y}{2} f'\left(\frac{x+y}{2} + \theta_1 . \frac{x-y}{2}\right) \\ f(y) &= f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{x-y}{2} f'\left(\frac{x+y}{2} - \theta_2 . \frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

avec $0 < \theta_1, \theta_2 < 1$. Par addition membres à membres, on a

$$\begin{aligned} f(x)+f(y) &= 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &\quad + \frac{x-y}{2} \left[\underbrace{f'\left(\frac{x+y}{2} + \theta_1 . \frac{x-y}{2}\right) - f'\left(\frac{x+y}{2} - \theta_2 . \frac{x-y}{2}\right)}_{\geq 0 \text{ puisque } f' \text{ est croissante}} \right]. \end{aligned}$$

D'où $f(x)+f(y) \geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. ◆

Énoncé 4

① En utilisant le développement limité de $\cos x$ et $\sin x$ à l'ordre 2 et à l'ordre 3 respectivement, montrer que :

$$\text{cotg } x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \varepsilon(x) \qquad (1)$$

au voisinage de $x = 0$.

② Soit, pour $n \in \mathbb{Z}$, l'intervalle de $\mathbb{R}$ défini par

$$\mathbb{I}_n =]n\pi - \pi 2, n\pi + \pi 2[\,.$$

Montrer que dans l'intervalle $\mathbb{I}$, l'équation $\text{tg } x = x$ a une solution unique, que l'on notera x_n. Pour cela on pourra étudier les variations de la fonction $g(x) = \text{tg } x - x$ dans $\mathbb{I}_n$. On a donc

$$\text{tg } x_n = x_n. \qquad (2)$$

③ On pose $u_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - x_n$. On a donc $0 < u_n < \pi$.

④ Montrer que

$$\text{cotg } u_n = n\pi + \pi 2 - u_n. \qquad (3)$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

⑤ Montrer, en utilisant (1) et (3) que lorsque $n \to +\infty$ on a $u_n \simeq 1n\pi$. (On utilisera la définition des équivalents).

⑥ On pose maintenant $u_n = 1 + \delta_n n\pi$, $\quad \lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0$. Montrer, toujours à l'aide de (1) et (3), que $\delta_n \simeq -\dfrac{1}{2n}$ quand $n \to +\infty$. En déduire le développement de u_n à l'ordre 2 par rapport à $\dfrac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$, et l'expression correspondante de λ_n.

⑦ Etablir une expression analogue de x_n lorsque $n \to -\infty$. On se ramènera au cas précédent.

Solution.

① En développant le numérateur et le dénominateur au voisinage de 0, on obtient
$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)}{x(1 - \frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x))} = \frac{1}{x}q(x).$$
On fait une division suivant les puissances croissantes dans $q(x)$, on obtiendra $q(x) = 1 - \dfrac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)$. D'où cotg $(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} + \varepsilon(x)$.

② Soit $k \in \mathbb{Z}$. Dans l'intervalle $\mathbb{I}_k$, la fonction $\varphi : x \to \operatorname{tg} x - x$ est continue. On peut y appliquer la propriété de la valeur intermédiaire. Comme $\lim_{x\to k\pi\pm\frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg} x - x] = \pm\infty$, la fonction s'annule sur $\mathbb{I}_k$. Enfin, la fonction g est croissante sur $\mathbb{I}_k$, car $\varphi'(x) = (\operatorname{tg} x - x)' = \operatorname{tg}^2 x > 0$. Donc la fonction φ s'annule une seule fois sur l'intervalle $\mathbb{I}_k$. Il existe alors x_k tel que tg $x_k = x_k$, k étant fixé.

③ On a
$$\operatorname{cotg}(u_k) = \operatorname{tg} \lambda_k = \lambda_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - u_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$
Comme $0 < u_k < \pi$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(k\pi + \dfrac{\pi}{2} - u_k\right) = +\infty$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \operatorname{cotg}(u_k) = +\infty$ et alors $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

④ Comme $u_k \to 0$ quand k tend vers $+\infty$, d'après (1) et (3), on obtient le développement
$$\operatorname{cotg}(u_k) = \frac{1}{u_k} - \frac{u_k}{2} + \varepsilon(u_k) = k\pi + \frac{\pi}{2} - u_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$
On remplace u_k par sa valeur et en divisant par $k\pi$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient
$$\frac{1}{k\pi u_k} = \frac{2u_k}{3k\pi} + 1 + \frac{\pi}{2k\pi} + \varepsilon\left(\frac{u_k}{k\pi}\right).$$
Le terme de droite tend vers 1 quand k tend vers $+\infty$ car $0 < u_k < \pi$. Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} (k\pi u_k) = 1$. D'après la propriété des équivalents et lorsque k tend vers $+\infty$, on a $u_k \simeq \dfrac{1}{k\pi}$.

⑤ On peut écrire $u_k = \dfrac{1+\delta_k}{k\pi}$. On reporte cette valeur dans (4), on obtient $\dfrac{2}{3(k\pi)} + \dfrac{2}{3}\dfrac{\delta_k}{(k\pi)} - \dfrac{\delta_k k\pi}{1+\delta_k} - \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon\left(\dfrac{1+\delta_k)}{k\pi}\right) = 0$. Comme $\dfrac{\delta_k}{k\pi}$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ et en passant à la limite dans cette égalité, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} \left(\dfrac{\delta_k k\pi}{1+\varepsilon_k}\right) = \lim\limits_{k\to+\infty} \delta_k k\pi = -\dfrac{\pi}{2}$. Ceci peut s'écrire $\delta_k = -\dfrac{1}{2k} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{k}\right)$ et alors
$$u_k = 1 + \delta_k k\pi = \frac{1}{k\pi} - \frac{1}{2k^2\pi} + \varepsilon\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Donc, lorsque k tend vers $+\infty$, on a

$$x_k = k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi} + \frac{1}{2k^2\pi} + \varepsilon\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

⑤ Comme la fonction $x \to \operatorname{tg} x - x$ est impaire, on a

$$x_{-k} = -x_k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Posons $m = -n$. Quant $m \to +\infty$ et d'après 5), on a

$$x_m = m\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{m\pi} + \frac{1}{2m^2\pi} + \frac{1}{m^2}\varepsilon\left(\frac{1}{m}\right).$$

Ainsi, lorsque n tend vers $\pm\infty$, on a

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right).$$

Énoncé 5

Soit α un nombre réel positif. A tout $x \geq 1$, on fait correspondre le nombre

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{\alpha^2 x + 1}}.$$

① Lorsque $x \to +\infty$, le réel $t = \dfrac{1}{x}$ est un infiniment petit. Ecrire le développement limité, à l'ordre 2, de $f(x)$ par rapport à l'infiniment petit t.

② En déduire deux nombres réels a et b tels que

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - ax - b] = 0.$$

Solution. En posant $t = \dfrac{1}{x}$, l'expression en t de $f(x)$ devient

$$\psi(t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+\dfrac{t}{\alpha^2}}}.$$

Son développement limité à l'ordre 2 est donné par

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+\dfrac{t}{\alpha^2}}} = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)t^2\right)\left(1 - \frac{1}{2\alpha^2}t + \frac{3}{8\alpha^4}t^2\right) + t^2\varepsilon(t).$$

En développant la dernière expression et en posant $t = \dfrac{1}{x}$, on obtient

$$f(x) - \frac{1}{\alpha}x + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) = \frac{1}{\alpha x}\left[\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2\alpha^4} + \frac{1}{\alpha^2}\right)t^2 + \varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Le deuxième membre de cette égalité tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Il suffit donc de choisir $a = \dfrac{1}{\alpha}$ et $b = -\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

Énoncé 6

① Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Déterminer quand $x \to \pm\infty$, le développement asymptôtique d'ordre 2 par rapport aux puissances de $\dfrac{1}{x}$. En déduire la position du graphe de f par rapport à cette asymptôte.

② Même question pour la fonction $\varphi(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$.

Solution.

① Quand $x \to \pm\infty$, $\dfrac{1}{x} \to 0$ et on a le développement

$$\begin{aligned} 1+e^{\frac{1}{x}} &= 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 2\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right] \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right) + \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^4}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)\right]. \end{aligned}$$

Le développement limité de $f(x)$ au voisinage de l'infini est alors

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$ est une asymptôte au graphe de $f$et se situe au dessous de celui-ci puisque $f(x) - y = \dfrac{1}{48x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$ pour les valeurs suffisament petites de $\dfrac{1}{x}$.

② En effectuant le même changement de variable, on obtient le développement asymptôtique $\varphi(x) = x + 2 + \dfrac{3}{2x} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La droite d'équation $y = x + 2$ est donc une asymptôte et comme $f(x) - (x+2) = \dfrac{3}{2x} + \varepsilon\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Alors

- Pour x voisinage de $+\infty$, la courbe est au dessus de l'asymptote.
- Pour x voisinage de $-\infty$, la courbe est au dessous de l'asymptôte.

Chapitre 5

Intégration et Primitives

Dans ce chapitre $\mathbf{I}$ désigne un intervalle fermé borné de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

5.1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition. *On appelle subdivision $\boldsymbol{\pi}$ (d'ordre n)de l'intervalle $\mathbf{I} = [a, b]$ un ensemble fini ordonné*

$$\boxed{\boldsymbol{\pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}.}}$$

La partition $\boldsymbol{\pi}$ détermine n sous-intervalles semi-ouverts, dits intervalles de la subdivision $\boldsymbol{\pi}$, sous la forme $\mathbf{I}_i = [x_{i-1}, x_i[,\ \ i = 1, \cdots, n$. Le nombre

$$\boxed{\|\boldsymbol{\pi}\| = \sup_{i=1,\cdots,n}\{|x_i - x_{i-1}|\}}$$

est dit pas de la subdivision $\boldsymbol{\pi}$.

La fonction f est dite en escalier sur $\mathbf{I}$, s'il existe une partition finie $\boldsymbol{\pi}$ de $\mathbf{I}$ tel que f soit constante sur chaque intervalle $\mathbf{I}_i$ de la partition $\boldsymbol{\pi}$.

☞ **Exemple 5.1.1** Lorsque $x_i = a + ih$ avec $h = \dfrac{b-a}{n}$ on obtient une subdivision, dite **équidistante**. Le nombre h est le **pas uniforme** de cette subdivision. ◆

On note par $\mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions réelles sur $\mathbf{I}$ et par $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$, des fonctions en escalier sur $\mathbf{I}$.

☞ **Exemple 5.1.2** La fonction partie entière qui à $x \in \mathbb{R}$ associe sa partie entière $E(x)$, est une fonction en escalier. Par exemple, sur l'intervalle fermé $\left[0, \frac{5}{2}\right]$, on a

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, 2[\\ 2 & \text{si } x \in \left[2, \frac{5}{2}\right]. \end{cases}$$

Le pas de la subdivision $\boldsymbol{\pi}$ de l'intervalle fermée $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ est égal à 1 . ◆

Notons par $\chi_{\mathbf{J}}$ la fonction caractéristique de l'intervalle $\mathbf{J} \subset \mathbf{I}$ définie par

$$\chi_{\mathbf{J}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{J} \\ \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{J}. \end{cases}$$

Ainsi si $\mathbf{J}$ et $\mathbf{J}'$ sont deux sous-intervalles non disjoints de $\mathbf{I}$, alors $\chi_{\mathbf{J}\cap\mathbf{J}'} = \chi_{\mathbf{J}}.\chi_{\mathbf{J}'}$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$a.\chi_{\mathbf{J}} + b.\chi_{\mathbf{J}'} = a.\chi_{\mathbf{J}\setminus\mathbf{J}'} + (a+b).\chi_{\mathbf{J}\cap\mathbf{J}'} + b.\chi_{\mathbf{J}'\setminus\mathbf{J}}.$$

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$ des fonctions en escalier, est engendré par les fonctions caractéristiques des sous-intervalles de $\mathbf{I}$:

Chaque fonction en escalier est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques.

Lemme 5.1.1 *Si f et g sont deux fonctions en escalier sur l'intervalle $\mathbf{J}$, alors fg est une fonction en escalier. De même*

$$\sup(f,g), \quad \inf(f,g), \quad f^+ = \sup(f,0), \quad f^- = (-f)^+ \quad \textit{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

sont des fonctions en escalier.

Preuve : En effet, on a $\chi_{\mathbf{J}\cap\mathbf{J}'} = \chi_{\mathbf{J}}.\chi_{\mathbf{J}'}$. Ce qui prouve la première assertion. Pour la seconde, on remarque que si f (resp. g) est constante sur les intervalles $\mathbf{J}$ (resp. $\mathbf{J}'$) en nombre fini d'une partition $\boldsymbol{\pi}$ (resp. $\boldsymbol{\pi}'$) d'un même intervalle $\mathbf{I}$, alors f et g sont toutes les deux constantes sur les intervalles de la partition $\boldsymbol{\pi} \cap \boldsymbol{\pi}'$ de $\mathbf{I}$. Ce qui donne $f = a.\chi_{\mathbf{J}\cap\mathbf{J}'}$ et $g = b.\chi_{\mathbf{J}\cap\mathbf{J}'}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ces fonctions sont constantes sur $\mathbf{J} \cap \mathbf{J}'$ et nulles sur son complémentaire dans $\mathbf{I}$. $\square$

Définition. *Soit f une fonction en escalier positive sur l'intervalle $\mathbf{I} = [a,b]$. On appelle intégrale de f sur l'intervalle $\mathbf{I}$, le nombre qui mesure l'aire comprise entre l'axe $x'ox$, les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, et le graphe de la fonction f. L'intégrale de f se note*

$$\boxed{\mathfrak{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx.}$$

En particulier $\mathfrak{I}(f) \geq 0$ si f est une fonction en escalier positive.

Prenons une partition $\boldsymbol{\pi}$ de l'intervalle $\mathbf{I}$ de la forme : $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$. Comme f est constante sur chaque intervalle de la partition $\boldsymbol{\pi}$, posons $f(x_i) = a_i$, alors

$$\boxed{\mathfrak{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx = a_1(x_2 - x_1) + \cdots + a_n(x_{n+1} - x_n).}$$

Cette intégrale ne dépend pas de la subdivision $\boldsymbol{\pi}$, elle dépend uniquement de la fonction f comme on pourra le démontrer d'une façon générale dans la prochaine section.

Remarque. La variable x qui intervient dans l'intégrale $\mathfrak{I}(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ est dite variable d'intégration. C'est une variable muette dans le sens ou la valeur de $\mathfrak{I}(f)$ n'en dépend pas, c'est-à-dire que la variable x peut-être changée par une autre variable sans changer pour autant la valeur de l'intégrale.

☞ **Exemple 5.1.3** Dans l'exemple précédent, La subdivision de l'intervalle $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ est $\boldsymbol{\pi} = \left\{a = 0 < 1 < 2 < \frac{5}{2} = b\right\}$. L'intégrale de la fonction en escalier $E(x)$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{5}{2}\right]$ est $\mathcal{I}(E) = \displaystyle\int_0^{\frac{5}{2}} E(x)dx = 0.(1-0) + 1.(2-1) + 2.\left(\frac{5}{2} - 2\right) = 2.$ ◆

☞ **Exemple 5.1.4** Si f est une fonction constante sur l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire $f(x) = c$ pour tout $x \in [a, b]$, alors $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$. ◆

Lemme 5.1.2 *Soient f et g deux fonctions en escalier positives sur l'intervalle $\mathbf{I}$. L'application $\mathcal{I} : \mathcal{C}(\mathbf{I}, \mathbb{R})^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est linéaire. C'est à dire*

$$\mathcal{I}(f+g) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{I}(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}(f).$$

Preuve : . On choisit une partition finie $\boldsymbol{\pi}$ de l'intervalle $\mathbf{I}$ de la forme $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1} = b$ où les deux fonctions sont constantes sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}[$, $i = 1, \cdots, n$. C'est à dire $f(x) = a_i$ et $g(x) = b_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$. Alors $(f+g)(x) = a_i + b_i, \forall x \in]x_i, x_{i+1}[$ et

$$(x_{i+1} - x_i)a_i + (x_{i+1} - x_i)b_i = (x_{i+1} - x_i)(a_i + b_i).$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)a_i + \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)b_i = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)(a_i + b_i).$$

Ce qui prouve la première égalité. De même, $(\lambda f)(x) = \lambda a_i$ pour $x_i < x < x_{i+1}$. Donc

$$\lambda\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)a_i\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_{i+1} - x_i)(\lambda a_i).$$

D'où la deuxième égalité. ◆

Lemme 5.1.3 *Soient f et g deux fonctions en escalier telles que $0 \leq f \leq g$. L'application $g - f$ est positive et en escalier et l'on a*

$$\boxed{\mathcal{I}(g-f) = \mathcal{I}(g) - \mathcal{I}(f).}$$

Preuve : . Les fonctions en escalier forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$. Donc la fonction $g - f$ est en escalier et positive. Ainsi, $\mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g - f) = \mathcal{I}(g)$. ◆

Lemme 5.1.4 *Soit $f \in \mathcal{E}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$, une fonction en escalier sur l'intervalle $\mathbf{I}$. On a*

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.}$$

Preuve : . Avec les mêmes notations que dans les lemmes précédents, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| &= |(x_1 - x_0)\alpha_0 + \cdots + (x_{n+1} - x_n)\alpha_n| \\ &\leq |\alpha_0|(x_1 - x_0) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|\alpha_n| \\ &= \int_a^b |f(x)|\, dx. \quad ◆\end{aligned}$$

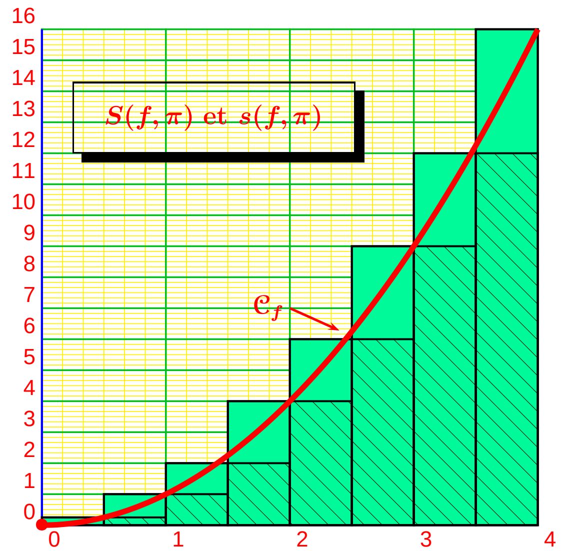
5.2 Intégrale des fonctions positives

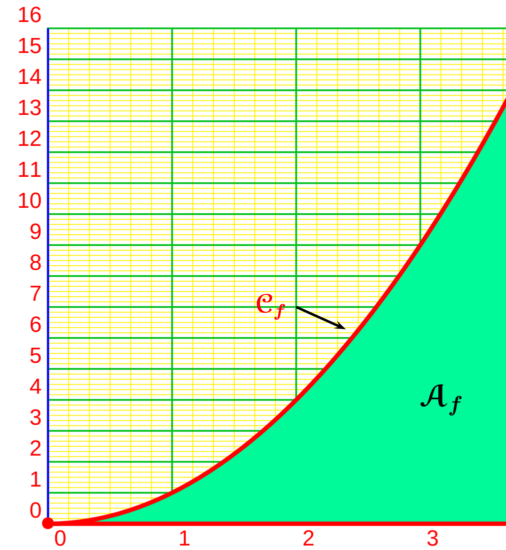
A chaque fonction bornée sur un intervalle fermé $\mathbf{I} = [a, b]$, on associe deux nombres appelés intégrales inférieures et supérieures de f sur $\mathbf{I}$. La fonction f est dite intégrable au sens de Riemann lorsque les deux intégrales sont égales.

5.2.1 Sommes de Darboux

Pour chaque subdivision $\boldsymbol{\pi} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ et f une fonction bornée sur l'intervalles $\mathbf{I} = [a, b]$, on pose

$$M_i = \sup_{x \in \mathbf{I}_i} f(x) \quad \text{et} \quad m_i = \inf_{x \in \mathbf{I}_i} f(x).$$





On définie deux nombres appelés sommes de Darboux de f sur l'intervalle $\mathbf{I}$, par

$$\boldsymbol{S(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i.|I_i|} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{s(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i.|I_i|.}$$

L'aire $\mathcal{A}\ (f)$ de la surface délimitée par la courbe représentative de f, les droites verticales d'équations $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses vérifie la relation

$$S(f,\boldsymbol{\pi}) \leq \mathcal{A}\ (f) \leq s(f,\boldsymbol{\pi}).$$

☞ **Exemple 5.2.1** Soit la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur l'inervalle $\mathbb{I} = [0,4]$. Considérons la subdivision π de pas $\frac{1}{2}$ de $\mathbb{I}$. Les sommes de Darboux associées à cette subdivision représentent simultanément les surfaces supérieure et inférieure des rectangles au dessus et au dessous du graphe $\mathcal{C}_f$ de f sur l'intervalle $\mathbf{I}$. ◆

Les inégalités précédentes ne dépendent pas de la subdivision utilisée. Pour le voir, considérons deux subdivisions $\boldsymbol{\pi}$ et $\boldsymbol{\pi'}$ de l'intervalle $[a, b]$

$$\boldsymbol{\pi} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\pi} = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b\}$$

On dit que : $\boldsymbol{\pi}$ est un raffinement de $\boldsymbol{\pi'}$ si $\boldsymbol{\pi} \subset \boldsymbol{\pi'}$. Ainsi :

Proposition 5.2.1 *Supposons que la subdivision $\boldsymbol{\pi}$ est un raffinement de la subdivision $\boldsymbol{\pi'}$, alors :*

$$\boxed{S(f, \pi) \leq S(f, \pi'), \qquad s(f, \pi) \geq s(f, \pi') \qquad \text{et} \qquad S(f, \pi) \geq s(f, \pi').}$$

Si $\boldsymbol{\pi_1}$ et $\boldsymbol{\pi_2}$ sont deux subdivisions de l'intervalle $\mathbf{I}$ alors

$$\boxed{s(f, \pi_1) \leq S(f, \pi_2).}$$

Preuve : . Posons $\mathbf{I}_1, \cdots, \mathbf{I}_n$ les intervalles de $\boldsymbol{\pi}$ et $\mathbf{J}_1, \cdots, \mathbf{J}_m$ les intervalles de $\boldsymbol{\pi'}$:

Pour tout $i = 1, \cdots, m$, posons $\mathbf{I}_{i1}, \cdots, \mathbf{I}_{in_i}$ les intervalles contenus dans $\mathbf{I}_i$. Alors

$$S(f, \boldsymbol{\pi}) = \sum_{j=1}^{n} M_j.|I_j| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{n_i} M_{i_r}.|I_{i_r}| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{n_i} M_{J_i}.|I_j| = S(f, \boldsymbol{\pi'}).$$

Soit $\boldsymbol{\pi}$ le raffinement des deux subdivisions. Alors $s(f, \boldsymbol{\pi_1}) \leq s(f, \boldsymbol{\pi}) \leq S(f, \boldsymbol{\pi}) \leq S(f, \boldsymbol{\pi_2})$. ◆

Etant donnée une fonction positive f bornée sur l'intervalle $\mathbf{I} = [a, b]$, on va cherchée à définir $\mathcal{I}(f)$. Pour cela on considère :

Les intégrales associées aux fonctions en escalier sur I qui majorent f forment un ensemble noté $\mathcal{E}^*(f, \mathbf{I})$ et les intégrales associées aux fonctions en escalier sur I qui minorent f forment un ensemble noté $\mathcal{E}_*(f, \mathbf{I})$.

Soient $\mu \in \mathcal{E}^*(f, \mathbf{I})$ et $\omega \in \mathcal{E}_*(f, \mathbf{I})$ deux fonctions en escalier positives, alors $\omega < f < \mu$ et $\int_a^b \omega(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b \mu(x)\, dx$. Posons

$$\mathfrak{I}_*(f) = \sup_{\omega \in \mathcal{E}^*(f,\mathbf{I})} I(\omega) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I}^*(f) = \inf_{\mu \in \mathcal{E}_*(f,\mathbf{I})} I(\mu).$$

Alors

$$\boxed{\mathfrak{I}_*(f) \leq \mathfrak{I}^*(f).}$$

Définition. *Une fonction f positive définie et bornée sur l'intervalle $[a, b]$ est dite intégrable (au sens de Riemann) si*

$$\boxed{\mathfrak{I}_*(f) = \mathfrak{I}^*(f).}$$

Leur valeur commune s'appelle intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$. On note

$$\boxed{\mathfrak{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx.}$$

nction de
irichlet

☞ **Exemple 5.2.2** La fonction de Dirichlet

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intgrable, car on a, pour toute partition $\boldsymbol{\pi}$ de $[a, b]$, on a

$$s(f, \pi) = 0 \;\; \text{et} \;\; S(f, \pi) = b - a.$$

En effet, dans chaque sous-intervalle $\mathbb{I}_i$ de la partition il existe un nombre rationnel et un autre irrationnel, donc $\sup_{\mathbb{I}} f = 1$ et $\inf_{\mathbb{I}} f = 0$. Ainsi, $s(f, \pi) = 0$ et $S(f, \pi)$ sera la somme des sous-intervalles de$[a, b]$ qui n'est autre que $b - a$. ◆

Donnons-en, maintenant, une défintion équivalente de l'intégrabilité au sens de Riemann.

Proposition 5.2.2 Pour qu'une fonction définie positive et borée sur l'intervalle $\mathbf{I} = [a, b]$ soit intégrable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$, il y ait deux fonctions ω_2 et ω_1 telles que $0 < \omega_2 \leq f \leq \omega_1$ et $\mathcal{I}(\omega_1) - \mathcal{I}(\omega_2) \leq \varepsilon$.

Preuve : La condition est nécéssaire puisque, Le nombre $\mathcal{I}^*(f)$ (resp. $\mathcal{I}_*(f)$) est définie comme une borne inférieure (resp. supérieure), pour tout ε_1 (resp.) ε_2)) > 0, il existe une fonction étagée ω_1 (resp. ω_2) qui majore (resp. minore) f telle que

$$\mathcal{I}^*(\omega_2) \leq \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}^*(\omega_2) + \varepsilon_2 \qquad (\textbf{resp. } \mathcal{I}_*(\omega_1) - \varepsilon_1 \leq \mathcal{I}(f) \leq I_*(\omega_1)).$$

Montrons que la condition est suffisante. Soient $\varepsilon > 0$, ω_1 et ω_2 deux fonctions en escalier satisfaisant aux inégalités de l'énoncé, alors $\mathcal{I}(\omega_2) \leq \mathcal{I}_*(f) \leq \mathcal{I}^*(f) \leq \mathcal{I}(\omega_1)$. Comme la différence entre les extrêmes est majorée par ε_1 alors $\mathcal{I}^*(f) - \mathcal{I}_*(f) \leq \varepsilon$. Ceci est vrai pour tout ε donc $\mathcal{I}^*(f) = \mathcal{I}_*(f)$. ◆

Soient f et g deux fonctions intégrables. D'après cette proposition il découle les propriétés suivantes des intégrales de fonctions positives, à savoir :

- Pour tout $\lambda > 0$, on a : $\mathcal{I}(f + g) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)$ et $\mathcal{I}(\lambda f) = \lambda\mathcal{I}(f)$.
- Si $f \geq g$, la fonction $f - g$ est positive et on a : $\mathcal{I}(f - g) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g)$.
- Les fonctions : $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$, fg, $(f - g)^+$, $(f - g)^-$ et $|f - g|$ sont intégrables.

Les résultats sur l'intégrabilité des fonctions positives bornées sur un intervalle $\mathbf{I} = [a, b]$ s'étendent aux fonctions réelles définies et bornées sur $\mathbf{I}$. Ceci est une conséquence du résultat suivant :

Lemme 5.2.3 *Soient f et g sont deux fonctions définies, positives et bornées sur $\mathbf{I}$. Si f et g sont intégrables, alors $f - g$ l'est aussi et*

$$\boxed{\mathcal{I}(f - g) = \mathcal{I}(f) - \mathcal{I}(g).}$$

Preuve : Comme les fonctions $(f - g)^+$ et $(f - g)^-$ sont intégrables alors $f - g$ est intégrable. Comme $\sup(f, g) = f + (f - g)^- = g + (f - g)^+$ alors $\mathcal{I}(f) + \mathcal{I}[(f - g)^-] = \mathcal{I}(g) + \mathcal{I}[(f - g)^+]$. D'où le résultat. ◆

Les fonctions réelles, définies, bornées et intégrables sur un intervalles $\mathbf{I}$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbf{I}, \mathbb{R})$ et l'application $f \to \mathcal{I}(f)$ est une forme linéaire sur cet espace.

Théorème 5.2.4 (La moyenne) *Soit f une fonction réelle, définie bornée et intégrable sur l'intervalle $\mathbf{I} = [a, b]$. Posons $m = \inf_{x \in \mathbf{I}} f(x)$ et $M = \sup_{x \in \mathbf{I}} f(x)$, alors*

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).}$$

Preuve : Les fonctions m et M sont constantes sur l'intervalle $\mathbf{I}$, elles sont des fonctions en escalier sur $\mathbf{I}$ donc elles sont intégrables et on a $\mathcal{I}(m) \leq \mathcal{I}(f) \leq \mathcal{I}(M)$. Le théorème découle du fait que $\mathcal{I}(m) = m(b-a)$ et $\mathcal{I}(M) = M(b-a)$. ◆

La proposition précédente est un outil pour montrer l'intégrabilité de certaines classes de fonctions intégrables :

- **Toute fonction continue sur un intevalle compact $\mathbb{I} = [a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est intégrable.**

  Preuve : En fait, f est une fonction bornée et uniformément continue sur $\mathbb{I}$. Par définition : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) > 0, \forall x, x' \in \mathbb{I}\ :\ |x - x'| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| \leq \dfrac{\varepsilon}{|b-a|}$. On choisit une subdivision $\boldsymbol{\pi} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de I vérifiant $|x_i - x_{i-1}| \leq \eta, i \geq 1$. On définit deux fonctions en escalier ω_1 et ω_2 sur $\mathbb{I}$ par ses restrictions sur les sous-intervalles de la subdivision $\boldsymbol{\pi}$, pour tout $x \in \mathbb{I}_i = [x_{i-1}, x_i]$, par : $\omega_2(x) = \inf_{t \in \mathbb{I}_i} f(t)$ et $\omega_1(x) = \sup_{t \in \mathbb{I}_i} f(t)$, $1 \leq i \leq n$. Les $\inf f$ et $\sup f$ sont finis car f est continue sur les compacts $\mathbb{I}_i$, donc elle est bornée sur chaque $\mathbb{I}_i$ et vérifie alors : $\omega_2 \leq f \leq \omega_1$ sur $\mathbb{I}$.

5.2.2 Inégalités de Cauchy-Schwarz, Hölder et Minkowski

Les inégalités suivantes sont utiles a plusieurs égards.

Théorème 5.2.5 **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)** *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, alors on a*

$$\boxed{\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2} . \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}}$$

Preuve : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $(|f| + \lambda|g(x)|)^2 \geq 0$ alors le polynôme de degrè 2 en λ

$$\lambda^2. \int_a^b |g(x)|^2 dx + 2\lambda. \int_a^b |f(x)||g(x)|dx + \int_a^b |f(x)|^2 dx$$

qui est positif si et seulement si le descriminant réduit

$$\delta = \left(\int_a^b |f(x).g(x)|dx\right)^2 - \int_a^b |f(x)|^2 \int_a^b |g(x)|^2$$

est inférieur ou égal à 0. D'où le résultat. ◆

Théorème 5.2.6 **(Inégalité Minkowski)** *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, alors on a*

$$\boxed{\left(\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)^2 dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}}$$

Preuve : On développe $\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ◆

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder dont la preuve sort du cadre de ce programme :

Théorème 5.2.7 **(Inégalité de Hölder)** *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a, b]$ et si p et $q \in \mathbb{R}^*$ sont conjugués c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a*

$$\boxed{\left|\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{1/p} . \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{1/q}}$$

5.3 Primitives des fonctions

Définition. *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b]$, on peut lui associer une fonction F définie sur $[a, b]$ tel que $F'(x) = f(x)$. La fonction F est dite dans ce cas* **primitive** de f et on note

$$\boxed{F(x) = \int f(x)dx + C.}$$

Ainsi, deux fonctions qui admettent f comme dérivée diffèrent d'une constante c'est-à-dire que si une fonction admet une primitive sur un intervalle, elle en admet plusieurs.

☞ **Exemple 5.3.1** La fonction $F : x \mapsto \ln(x)$ est une primitive sur l'intervalle $\mathbb{R}_*^+$ de la fonction $f : x \mapsto 1/x$. Il en est de même de $G : x \mapsto \ln(3x)$ car $G(x) = F(x) + \ln(3)$. Par contre $F : x \mapsto \ell n(x)$ est la seule primitive de f sur $\mathbb{R}_*^+$ qui s'annule en $x = 1$. ◆

Dans ce qui suit, nous montrons que la dérivation et l'intégration sont deux opérations inverses l'une de l'autre. De ce fait, on établit un lien très étroit entre le calcul différentiel et le calcul inétgral. Ceci est justifié par le théorème fondmental suivant :

Théorème 5.3.1 Considérons une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$ on a

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).}$$

Preuve : Posons $I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. Soient $x \in]a, b[$ et $h > 0$ tel que $x \pm h \in [a, b]$. Comme l'intégrale est linéaire et additive, on a

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]\, dt$$

$$\frac{I(x-h)-I(x)}{-h}-f(x) = \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x}[f(t)-f(x)]\,dt.$$

Posons $\varepsilon_1 = \sup\{|f(t)-f(x)|\,|\,t\in[x,x+h]\}$ et $\varepsilon_2 = \sup\{|f(t)-f(x)|\,|\,t\in[x-h,x]\}$. Il vient que

$$\left|\frac{I(x+h)-I(x)}{h}-f(x)\right| \leq \varepsilon_1 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{I(x-h)-I(x)}{-h}-f(x)\right| \leq \varepsilon_2.$$

De la continuité de la fonction f au point x, découle

$$I'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{I(x+h)-I(x)}{h} = f(x).$$

On montre de la même manière dans les cas où $x=a$ et où $x=b$. ◆

Théorème 5.3.2 Considérons une fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue qui admet une dérivée continue sur l'intervalle $[a,b]$. Alors,

$$\boxed{\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a).}$$

On note $F(b)-F(a)$ par $F(x)|_a^b$

Preuve : Considérons la fonction $J(x) = \displaystyle\int_a^x F'(t)dt$. D'après le théorème précédent, on a $J'(x) = F'(x)$. Ainsi, les fonctions $J(x)$ et $G(x) = F(x)-F(a)$ admettent la même dérivée sur l'intervalle $[a,b]$, donc $J(x)-G(x) = C$ où C est une constante. Comme $J(a) = G(a)$, alors $C = 0$, c'est-à-dire que $J(x) = G(x)$ pour tout $x\in[a,b]$. En prenant $x=b$, il vient que $J(b) = G(b) = F(a)-F(b)$. ◆

Donc, pour estimer $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ il suffit de trouver une fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$ et on a tout simplement

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\,|_a^b.}$$

On traite maintenant deux propriétés importantes de l'intégrale : L'intégration par parties qui correspond à la règle de dérivation d'un produit et la formule de changement de variable qui correspond à la dérivation en chaîne.

Théorème 5.3.3 (Intégration par parties). Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continûment dérivables. Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.}$$

Preuve : La dérivation du produit s'écrit

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Donc

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\ dx.$$ ◆

Remarque : Pour calculer une intégrale de la forme $\int_a^b u(x)\ dx$, il suffit d'écrire la fonction sous le signe somme sous la forme $u(x) = f(x)g'(x)$.

Théorème 5.3.4 (Changement de variable). Soit $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et strictment monotone. Supposons que g vérifie $g[c, d] = [a, b]$. Pour tout fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = \int_c^d f(g(t))|g'(t)|\ dt}$$

Preuve : Si F est une primitive de f alors $(F(g(t))' = F'(g(t)).g'(t) = f(g(t)).g'(t)$. Alors

$$F(g(t)) = \int (F(g(t))'dt = \int f(g(t)).g'(t)dt.$$

Si g est croissante, c'est-à-dire $g' > 0$, alors

$$\int_c^d f(g(t)).g'(t)dt = F(g(t))|_c^d = F(g(c)) - F(g(d)) = F(a) - F(b) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Si g est décroissante, c'est-à-dire $g' < 0$ soit que $-g' > 0$, d'après ce qui précède on a

$$\int_c^d f(g(t)).(-g'(t))dt = -F(g(t))|_c^d = -F(g(c))+F(g(d)) = -F(a)+F(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$ ◆

☞ **Exemple 5.3.2** Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+5}$. Le dénominateur s'écrit sous forme factorisée $x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 = 4\left[\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+1\right]$. Pour déterminer la primitive de f, faisons un changement de variables en posant $t = \frac{x-1}{2}$. Il s'en suit que $dt = \frac{dx}{2}$ et que $\displaystyle\int f(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg}\, u + C = \frac{1}{2}\text{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.$ ◆

☞ **Exemple 5.3.3** La fonction $f(x) = \dfrac{x^3+5}{x(x^2-2x+5)}$ se décompose sous forme

$$f(x) = 1 + \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2-2x+5}$$

Mais $a = \lim\limits_{x\to 0} xf(x) = 1$ et $bx+c = \left[f(x)-1-\dfrac{1}{x}\right](x^2-2x+5) = x-3$. Ainsi

$$f(x) = 1+\frac{1}{x}+\frac{x-3}{x^2-2x+5} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+5}-\frac{2}{x^2-2x+5}.$$

Sa primitive est alors

$$\int f(x)dx = x+\ln(x)+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5| - \text{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+C.$$ ◆

5.4 Exercices Corrigés

Exercice 5.4.1. ☞

Un mobile parcourt une courbe avec une accélération à l'instant t donnée par $\gamma_t = t^2 + 5\sin 3t - 2$ Calculer sa vitesse v_t à cet instant ainsi que la distance parcourue x_t. On donne les valeurs initiales de la vitesse et la distance à l'instant $t=0$: $v_0 = 10$ et $x_0 = 5$.

Solution. On a par définition

$$v_t = \int \gamma_t dt = \int (t^2 + 5t - 2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{3}\cos 3t - 2t + C.$$

Pour $t = 0$, on a $v_0 = -\frac{5}{3} + C$, donc $C = \frac{5}{3}$. Et alors

$$v_t = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{3}\cos 3t - 2t + \frac{5}{3}.$$

La distance parcourue jusque là est

$$x_t = \int v_t dt = \frac{t^4}{12} - \frac{5}{9}\sin 3t - t^2 + \frac{5}{3}t + C'.$$

Pour $t = 0$, on a $x_0 = C' = 5$. Soit que

$$x_t = \frac{t^4}{12} - \frac{5}{9}\sin 3t - t^2 + \frac{5}{3}t + 5.$$

Exercice 5.4.2. ☞

① Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{x^2}dx, \quad I_2 = \int \frac{xdx}{(x^2 + a^2)^n}dx, \ a \neq 0, \quad I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{2x - 3)}}, \quad x > \frac{3}{2}.$$

② Calculer les intégrales suivantes

$$I_4 = \int \sin x \cos x dx, \quad I_5 = \int xe^x dx, \quad I_6 = \int \ell n x dx, \quad I_7 = \int e^x \sin x dx.$$

Solution. On exprime les racines d'ordre n en terme de fonctions puissances et on utilise la substitution dès que l'occasion le permettra.

① On exprime la racine d'ordre n sous forme de fraction. Ainsi

$$I_1 = \int \frac{x^{1/2} - x^{1/3}}{x^2}dx = \int \left(x^{-3/2} - x^{-5/2}\right) dx$$

$$= \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

Dans l'intégrale I_2 on utilise la substitution $\xi = x^2 + a^2$, alors $d\xi = 2xdx$. Donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{d\xi}{\xi^n}.$$

On distingue ainsi deux cas :

Si $n \neq 1$. On obtient

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{\xi^{-n+1}}{1-n} + C = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Si $n = 1$. On obtient

$$I_2 = \frac{1}{2}\ell\text{n}\xi + C = \frac{-1}{2}\ell\text{n}(x^2+a^2) + C.$$

Pour I_3, on change de variable en posant $u = \sqrt{2x-3} > 0$ ce qui donne $dx = tdt$. Alors

$$I_3 = \int \frac{udu}{u} = \int du = \sqrt{2x-3} + C.$$

② Pour intégrer I_4, on peut écrire $\sin x \cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$. Donc

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{1}{2}\int \sin 2x = \frac{1}{4}\int \sin 2x d(2x) \\ &= -\frac{1}{4}\cos 2x + C. \end{aligned}$$

Dans I_5, on intègre par parties en posant

$$u = x \quad du = dx \qquad dv = e^x dx \quad v = e^x.$$

Il vient que

$$I_5 = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Dans I_6, on procède de la même façon en posant

$$u = \ell\text{n}x, \quad du = \frac{1}{x}dx \qquad \text{et} \qquad dv = dx, \quad v = x.$$

Ce qui donne

$$I_6 = x\ell\text{n}x - \int x.\frac{dx}{x} = x\ell\text{n}x - x + C = x(\ell\text{n}x - 1) + C.$$

L'intégrale I_7 se traite de la mme manière, à savoir

$$u = \sin x, \quad du = \cos x dx \qquad \text{et} \qquad dv = e^x dx, \quad v = e^x.$$

Donc

$$I_7 = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$

On intègre par parties cette dernière intégrale

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

En revenant à l'intégrale initiale, on obtient

$$I_7 = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - I_7.$$

Et alors

$$I_7 = \int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

Exercice 5.4.3. ☞

Calculer, en précisant dans quels intervalles cela est possible, les primitives suivantes

$$J_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{x(x^2+1)^2}, \quad J_2 = \int_2^3 \frac{3x^3 + 10x^2 - 2x}{(x^2-1)^2} dx, \quad J_3 = \int \frac{dx}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2}.$$

Solution. Pour J_1, posons $u = x^2$ donc $du = 2xdx$. Ainsi

$$J_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2dx}{x(1+x^2)^2} = \int_1^2 \frac{du}{u(1+u)^2}.$$

On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{u(1+u)^2} = \frac{A}{u} + \frac{C}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2}.$$

On fait une division suivant les puissances croissantes

$$\frac{1}{u(1+u)^2} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2}.$$

Donc
$$J_1 = [\ell\text{n}|u|]_1^2 - [\ell\text{n}|1+u|]_1^2 + \left[\frac{1}{1+u}\right]_1^2 = -\frac{1}{6} + \ell\text{n}\frac{4}{3}.$$
L'intégrale J_2 se calcul en décomposant la fraction sous le signe intégrale, à savoir
$$\frac{3x^3+10x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}.$$
On obtient facilement que $A = \dfrac{11}{4}$ et $C = \dfrac{9}{4}$. On multiplie chaque membre par x et on fait tendre x vers $+\infty$ ce qui donne $B + D = 3$. Pour $x = 0$, on a $B = 4$ et $D = -1$. Enfin
$$\frac{3x^3+10x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{11}{4(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{9}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}.$$
En intégrant, on obtient
$$J_2 = \left[-\frac{11}{4}\frac{1}{x-1} + 4\ell\text{n}|x-1| - \frac{9}{4}\frac{1}{x+1} - \ell\text{n}|x+1|\right]_2^3 = \frac{25}{16} + \ell\text{n}12.$$
Dans J_3, on décompose la fraction rationnelle en éléments simples. Pour le pôle $x = -1$ d'ordre 3, on fait une division puissances croissantes à l'ordre 2, ce qui done
$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1} + \frac{Fx+G}{(x^2+x+1)^2}.$$
On multiplie chaque membre par $(x^2+x+1)^2$ et on pose $x = j = e^{2i\pi/3}$, ce qui donne $Fj + G = -1$ donc $f = 0$ et $G = -1$. On multiplie chaque membre par x et on fait tendre x vers $+\infty$. On trouve $D = -1$. Pour $x = 0$ on a $E = -2$ et enfin
$$\frac{1}{(x+1)^3(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} - \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$
On peut intégrer sur tout intervalle $[a, b]$ ne contenant pas -1 car la fonction est continue pour $x \neq -1$. Ainsi
$$J_3 = \ell\text{n}|x+1| - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} - \underbrace{\int \frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}}_{K_1} - \underbrace{\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}}_{K_2}.$$
Calculons les intégrales K_1 et K_2. On a
$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\ &= -\frac{1}{2}\ell\text{n}(x^2+x+1) - \sqrt{3}\ \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

et

$$K_2 = \int \frac{(x+2)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} = \frac{16}{9}\int \frac{dx}{\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]^2}.$$

Posons $X = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ donc $dX = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$. Ainsi

$$K_2 = \frac{8\sqrt{3}}{9}\int \frac{dX}{[1+X^2]^2}.$$

En décomposant la fonction sous l'intégrale en éléments simples par rapport à X et en remplaçant, on obtient

$$K_2 = \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Finalement

$$J_3 = \ell n\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{4x+5}{2(x+1)^2} - \frac{13\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + K.$$

Exercice 5.4.4. ☞

① Calculer les primitives suivantes

$$I_1 = \int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2+2x+2}dx.$$

On pourra écrire x^2+2x+2 sous la forme canonique et faire un changement de variable en utilisant les fonctions hyperboliques.

② Calculer l'intégrale suivante

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\sqrt{1-x^2}dx.$$

③ Démontrer l'égalité suivante

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi-x}{1+\sin x}dx.$$

En déduire la valeur de l'intégrale définie

$$I_3 = \int_0^\pi \frac{xdx}{1+\sin x}.$$

Solution.

① On peut écrire $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ et poser $x+1 = \text{sh}\ t$. On a alors $x=-1$ pour $t=0$ et θ désignant le nombre tel que $\text{sh}\ \theta = 1$. On a $dx = \text{ch}\ tdt$, d'où

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+2x+2}dx = \int_0^\theta (\text{sh}\ t - 1)\text{ch}\ ^2 tdt \\ &= \int_0^\theta \text{ch}\ ^2 t\text{sh}\ tdt - \int_0^\theta \text{ch}\ ^2 tdt \end{aligned}$$

On a

$$\int_0^\theta \text{ch}\ ^2 t\text{sh}\ tdt = \left[\frac{\text{ch}\ ^3 t}{3}\right]_0^\theta = \frac{1}{3}(\text{ch}\ ^3\theta - 1).$$

et

$$\int_0^\theta \text{ch}\ ^2 tdt = \int_0^\theta \frac{\text{ch}\ 2t+1}{2}dt \left[\frac{\text{sh}\ 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^\theta = \frac{\text{sh}\ 2t}{4}+\frac{\theta}{2}.$$

Or, $\sinh\theta = 1$, $\text{ch}\ ^2\theta - \text{sh}\ ^2\theta = 1$, donc $\text{ch}\ ^2\theta = 2$ et $\text{ch}\ \theta = \sqrt{2}$. puis $\text{sh}\ 2\theta = 2\text{sh}\ \theta\text{ch}\ \theta = 2\sqrt{2}$. On a donc

$$I_1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1) - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

Pour calculer θ, écrivons $e^\theta - e^{-\theta} = 2$ ou $e^{2\theta} - 2e^\theta - 1 = 0$ d'où

$$e^\theta = 1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \theta = \ell\text{n}(1+\sqrt{2}).$$

On sait d'ailleurs que $\text{argsh}\ \theta = \ell\text{n}|x+\sqrt{x^2+1}|$. Finalement

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} - \frac{\ell\text{n}(1+\sqrt{2}}{2}.$$

② La fonction sous le signe intégrale est continue sur l'intervalle $[-1,1]$ car $\lim_{x\to 0} x\ell\text{n}|x| = 0$, elle est donc intégrable sur cet intervalle. Effectuons le changement de variable $\varphi = \arccos x$ c'est à dire $x = \cos\varphi$ et $dx = \sin\varphi d\varphi$. Il vient que

$$I_2 = \int_\pi^0 2\ell\text{n}\left|\coth\frac{\varphi}{2}\right|\cos\varphi\sin\varphi(-\sin\varphi)d\varphi$$

$$= \quad -2\int_{\pi}^{0} \ell\text{n}\left|\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right| \cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi$$

Nous effectuons maintenant une intégration par parties

$$u = \ell\text{n}\left|\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right|, \quad du = \frac{d\varphi}{\sin\varphi}, \quad dv = \cos\varphi\sin^2\varphi d\varphi \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{3}\sin^3\varphi.$$

Mais

$$\left[\sin^3\varphi\ell\text{n}\left|\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right|\right]_0^{\pi} = 0.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{3}\int_0^{\pi} \ell\text{n}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\varphi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi \\ &= \frac{1}{3}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

③ En posant $x = \pi - t$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\pi - t}{1+\sin(\pi - t)}(-dt) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi - x}{1+\sin x}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{1+\sin x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin x}dx \end{aligned}$$

C'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{1+\sin x}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+2t1+t^2}21+t^2dt \\ &= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt = 2\pi\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 \\ &= 2\pi\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \pi. \end{aligned}$$

Exercice 5.4.5. ☞

①

②

Solution.

① On a

$$I = [\operatorname{argsh} x]_0^1 = \left[\ell\mathrm{n}|x + \sqrt{1+x^2}|\right]_0^1 = \ell\mathrm{n}(1+\sqrt{2}).$$

Pour J, on intègre par parties de façon à abaisser le degré de la puissance de x, il vient

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2 \sin x dx &= \left[-x^2\cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x dx\\ &= \pi^2 + [2x\sin x]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin x dx\\ &= \pi^2 - 4.\end{aligned}$$

② En mettant $\dfrac{1}{n}$ en facteur, la première somme s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$$

et on voit que la limite lorsque $n \to +\infty$ est $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ell\mathrm{n}(1+\sqrt{2})$. De la même façon la deuxième somme s'écrit

$$\frac{1}{\pi^3}\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^n \left(\frac{i\pi}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{n}\right).$$

D'où la limite est
$$\frac{1}{\pi^3}\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.$$
Remarque : On peut aussi écrire la deuxième somme
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \sin\left[\pi\left(\frac{i}{n}\right)\right]$$
qui a pour limite $\int_0^{\pi} x^2 \sin \pi x dx$.

Exercice 5.4.6. ☞ Calculer les intégrales suivantes
$$I_1 = \int_{-1}^{1} (\arccos x)^2 dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ell n(1+\cos x) dx, \quad I_3 = \int_0^1 \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} dx.$$
Même question avec les intégrales suivantes
$$I_4 = \int e^{\arcsin x}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I_5 = \int e^{\arcsin x} dx, .$$

Solution. Pour I_1, on intègre par parties deux fois. Posons le changement de variables
$$u = (\arccos x)^2, \quad dv = dx, \quad du = \frac{-2\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{et} \quad v = x.$$
Ce qui donne
$$I_1 = \left[x(\arccos x)^2\right]_{-1}^{+1} + 2\int_{-1}^{+1} \frac{x\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$
Faisons un deuxième changement
$$u_1 = \arccos x, \quad dv_1 = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad du_1 = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{et} \quad v_1 = -\sqrt{1-x^2}.$$
Ce qui donne
$$\begin{aligned} I_1 &= \left[x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x\right]_{-1}^{+1} - 2\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \left[x(\arccos x)^2 - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x\right]_{-1}^{+1} \\ &= \pi^2 - 4. \end{aligned}$$

L'intégrale I_2 se calcule par parties. On pose le changement de variables

$$u = \ell n(1+\cos x), \quad du = -\frac{\sin x dx}{1+\cos x}, \quad dv = \cos x \quad \text{et} \quad v = \sin x.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}
I_2 &= [\ell n(1+\cos x)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos x} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x) dx = [x - \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Pour le calcul de I_3, procède d'abord au manipulations suivantes

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^1 \frac{1 - x\cos\alpha}{(x-\cos\alpha)^2 - \cos^2\alpha + 1} dx = \int_0^1 \frac{\sin^2\alpha - \cos\alpha(1 - x\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2 \sin^2\alpha + 1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(\dfrac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2} - \int_0^1 \frac{\cos\alpha(x-\cos\alpha)dx}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} \\
&= \left[(\sin\alpha)\arctan\left(\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) - (\cos\alpha)\ell n\sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\right]_0^1
\end{aligned}$$

Soit

$$I_3 = \sin\alpha\left(\arctan\left(\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + \arctan(\text{cotg }\alpha)\right) - \cos\alpha\left(\ell n2 - \ell n\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|\right).$$

Ces calculs sont valables pour $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou $\alpha \neq 2k\pi$ ou $\alpha \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. D'autre part, pour ces valeurs, on a

$$I_3 = \begin{cases}
\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} & \text{Si } \alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\[2ex]
\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-x)} dx = +\infty & \text{Si } \alpha = 2k\pi \\[2ex]
\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} dx = \ell n2 & \text{Si } \alpha = (2k+1)\pi.
\end{cases}$$

Pour I_4, on intègre par parties sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans $]-1,1[$. Posons

$$u = e^{\arcsin x}, \quad du = \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad dv = \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad v = -\sqrt{1-x^2}.$$

Il vient que

$$I_4 = -\sqrt{1-x^2}e^{\arcsin x} + \int e^{\arcsin x}dx.$$

On procède à une deuxième intégration par parties de I_4, en posant

$$u = x, \quad du = dx, \quad dv = \frac{e^{\arcsin x}dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad v = e^{\arcsin x}.$$

On trouve alors

$$I_4 = xe^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x}dx$$

En ajoutant les deux expressions de I_4, on obtient

$$I_4 = \frac{1}{2}(x - \sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x} \quad \text{et} \quad I_5 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x}.$$

Exercice 5.4.7. ☞

① Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int \sin^6 x dx, \qquad I_2 = \int \text{sh}^6 x, \qquad I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{(1+\sin x)^4}, \qquad I_4 = \int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}.$$

② Calculer les intégrales suivantes

$$I_5 = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+2}}, \quad I_6 = \int \arctan x dx, \quad I_7 = \int \arcsin x dx, \quad I_8 = \int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$$

③ Calculer les intégrales suivantes

$$I_9 = \int dx \cos^6 x, \qquad I_{10} = \int \frac{dx}{\sin x}dx, \qquad I_{11} = \frac{dx}{\cos x}, \qquad I_{12} = \int \sqrt{\text{tg}\, x}dx.$$

④ Supposons que $b > a$. Calculer les intgérales suivantes

$$I_{13} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad I_{14} = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx \quad \text{et} \quad I_{15} = \frac{dx}{(1+x^2)^{7/2}}.$$

Solution.

① Pour le calcul de I_1, on utilise la formule de Moivre. Ainsi

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{(e^{ix}-e^{-ix})^6}{2^6 i^6} dx \\ &= -\frac{1}{64}\int \left[e^{6ix}+e^{-6ix}-6(e^{4ix}+e^{-4ix})+15(e^{2ix}+e^{-2ix})-20\right] dx \\ &= -\frac{1}{32}\int [\cos 6x - 6\cos 4x + 15\cos 2x - 10]\, dx \\ &= -\frac{\sin 6x}{192}+\frac{3}{64}\sin 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x + K. \end{aligned}$$

La mêm calcul que précédemment, on trouve

$$I_2 == -\frac{1}{192}\text{sh } 6x + \frac{3}{64}\text{sh } 4x - \frac{15}{64}\sin 2x + \frac{5}{16}x + K.$$

Pour I_3, posons le changement de variable $t = 1+\sin x$ ou $x = \arcsin(t-1)$. Il vient que

$$I_3 = \int_1^2 \frac{dt}{t^4} = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_1^2 = \frac{7}{24}.$$

Pour I_4, posons $t = x^2+1$ ou $x = \sqrt{1-t}$. Ce qui donne

$$I_4 = \int \frac{dt}{2t^3} = -\frac{1}{4t^2} + K = -\frac{1}{4(1+x^2)^2} + K.$$

② Pour I_5, on pose $t = x^2$ donc $x = \pm\sqrt{t}$. Suivant que x est positif ou négatif, on obtient

$$I_5 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2+t^2}} = \frac{1}{2}\ell\text{n}|t+\sqrt{2+t^2}| + K = \frac{1}{2}\ell\text{n}|x^2+1+\sqrt{2+x^4}| + K.$$

Pour I_6, on intègre par parties en posant $u = \arctan x$ et $dv = dx$. Alors

$$I_6 = x\ \arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + K$$

Pour I_7, on procède la même manière en posant $u = \arcsin x$ et $dv = dx$. Ce qui donne

$$I_7 = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + K.$$

Dans I_8, on procède au changement $t = \cos 2x$ ou $x = \dfrac{1}{2}\arccos t$. Soit

$$I_8 = -2\int \frac{dt}{(1+t)(1-t)^2} = -\frac{1}{2}\frac{\ell\text{n}(1+t)}{1-t} - \frac{1}{1-t} + K = \ell\text{n}|\text{tg } x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + K.$$

Posons $t = \text{tg}\ x$, pour trouver que

$$I_9 = \int (1+t^2)^2 dt = \text{tg}\ x + \frac{2}{3}\text{tg}^{\ 3} x + \frac{1}{5} tg^5 x + K.$$

dans l'intégrale I_{10} et I_{11}, on pose $t = \text{tg}\ \frac{x}{2}$. Soit

$$I_{10} = \int \frac{dx}{\sin x} = \ell\text{n} \left| \text{tg}\ \frac{x}{2} \right| + K \quad \text{et} \quad I_{11} = \int \frac{dx}{\cos x} = \ell\text{n} \left| \text{tg}\ \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + K'.$$

Posons $y = \sqrt{\text{tg}\ x}$ ou $2y dy = (1 + \text{tg}^{\ 2} x)dx$. Ce qui donne

$$I_{12} = 2 \int \frac{y^2 dy}{1+y^4}.$$

Il suffit de décomposer la fraction sous le signe intégrale en éléments simples et de reprendre les calculs faits précédemment.

③ Remarquons que

$$-x^2 + (a+b)x - ab = -\left[x - \frac{a+b}{2} \right]^2 + \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Ce qui donne

$$I_{13} = \left[\arcsin x - \frac{a+b}{2} \left| \frac{a-b}{2} \right| \right]_a^b = \pi.$$

Pour le calcul de I_{14} posons $x = \frac{|a-b|}{2} \cos\varphi + \frac{a+b}{2}$. Ainsi

$$I_{14} = \int_0^\pi \frac{(a-b)^2}{4} \sin^2\varphi \ d\varphi = \frac{(a-b)^2}{4} \int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\ d\varphi = \frac{(a-b)^2\pi}{8}.$$

Pour I_{15}, on pose $x = \text{tg}\ \varphi$ donc $dx = (1+x^2)d\varphi$ et

$$\begin{aligned} I_{15} &= \int \cos^5\varphi d\varphi = \int (1-\sin^2\varphi)^2 d(\sin\varphi) \\ &= \sin\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi + \frac{1}{5}\sin^5\varphi + K. \end{aligned}$$

Exercice 5.4.8. ☞

①

②

Solution.

① L'étude de la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x = 3$ sur l'intervalle $[2, 4]$ nous donne

$$f(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in [2, 3] \quad \text{et} f(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in [3, 4].$$

Par suite

$$I_1 = -\int_2^3 f(x) + \int_3^4 f(x)dx = 2.$$

Même remarque pour I_2. On obtient

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi} - [-\cos x]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} = 3.$$

Pour I_3, remarquons que

$$\cos x - \frac{1}{2} \geq 0 \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \quad \text{et} \qquad \cos x - \frac{1}{2} \leq 0 \quad \text{si} \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Par suite

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

② Dans I_4 posons le changement de variables $x = \text{sh } t$, on a

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \text{sh }^2 t dt = \int \frac{\text{ch } 2t - 1}{2} dt \\ &= \frac{\text{sh } 2t}{4} - \frac{t}{2} = \frac{\text{ch } t \text{sh } t}{2} - \frac{t}{2} \\ &= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{\text{argsh } x}{2}. \end{aligned}$$

Comme $\text{ch } t = \sqrt{1+x^2}$ alors $t = \text{argsh } x = \ell\text{n}(x + \sqrt{1+x^2})$ d'où

$$I_4 = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{\ell\text{n}(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + C.$$

Dans I_5 posons le changement de variables $x = \sin t$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2} dt \\ &= \frac{t}{2} - v\sin 2t4 = \frac{t - \sin t \cos t}{2} \\ &= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C. \end{aligned}$$

Dans I_6 posons le changement de variables $t = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$. Ainsi

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{t^2}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{\arctan t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \right) - \frac{\sqrt{1-x^4}}{4} + C. \end{aligned}$$

Exercice 5.4.9. ☞

① Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \\ 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & \text{si } f \text{ est paire.} \end{cases}$$

② En déduire les valeurs des intégrales suivantes

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{e^{x^2}\cos x \arctan x}{(1+x^2)^4}\, dx \quad \text{et} \quad J = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin x + \sin^3 x + \cdots + \sin^{2n+1} x)\ dx.$$

③ Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell\text{n}\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell\text{n}\left(\cos(x)\right)\ dx.$$

En déduire que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell\text{n}(1 + \text{tg}\ (x))dx = \frac{\pi \ell\text{n} 2}{8}.$$

Solution.

① Lorsque f est une fonction impaire, avec le changement de variable $t = -x$, $x \in [-a, 0]$, on a $dt = -dx$ et

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt = -\int_0^a f(t)dt.$$

Par suite

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Lorsque f est une fonction paire, posons $t = -x$, $x \in [-a, 0]$ on a $dt = -dx$ et

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt.$$

Par suite

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

② La fonction $x \longrightarrow \dfrac{e^{x^2}\cos x \arctan x}{(1+x^2)^4}$ est impaire donc $I = 0$. D'autre part la fonction $g : x \longrightarrow \sin x + \sin^3 x + \cdots + \sin^{2n+1} x$ est paire, donc

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx}_{=0} = (\pi - (-\pi) = 2\pi.$$

③ Avec le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{4} - x$ et puisque $\dfrac{\pi}{4} - t + t + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right) dt = \ell n\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right) dt.$$

Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)dx$$

et

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n(\sin x + \cos x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n(\cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n\sin x + \cos x\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ell n(\sqrt{2}) = \frac{\pi \ell n2}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 5.4.10.

① Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1}.$$

② Par une intégration par parties, obtenir à partir de I, la valeur de l'intégrale

$$J = \int_1^1 \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}.$$

③ Calculer l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{(x+1)dx}{(x^4 + 1)^2}.$$

Solution. On décompose d'abord la fonction sous le signe intégrale en éléments. simples.

① On obtient

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x-\dfrac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

De plus

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}(2x+\sqrt{2})+\frac{1}{4}.$$

L'intégrale I s'écrit sous la forme de deux intégrales. La première s'écrit

$$\int_0^1 \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^1 \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\Big[\ell\mathrm{n}(x^2+x\sqrt{2}+1)\Big]_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\arctan(x\sqrt{2}+1)\Big]_0^1 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ell\mathrm{n}(2+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}+1)-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ell\mathrm{n}(2+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

Calculons la deuxième intégrale en posant $X=-x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1} &= \frac{\sqrt{2}}{8}\Big[\ell\mathrm{n}(X^2+X\sqrt{2}+1\Big]_{-1}^{0} + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\arctan(x\sqrt{2}+1)\Big]_{-1}^{0} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ell\mathrm{n}(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\pi 4-\arctan(1-\sqrt{2})\Big) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{8}\ell\mathrm{n}(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

Soit

$$I = \frac{\sqrt{2}}{8}\ell\mathrm{n}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

② Pour faire apparaître l'intégrale J, on Intégre par parties I en posant

$$u=\frac{1}{(x^4+1)} \quad \text{et} \quad dv=dx.$$

Il vient

$$I = \left[\frac{x}{x^4+1}\right]_0^1 + 4\int_0^1 \frac{x^4dx}{(x^4+1)^2} = \frac{1}{2}+4I-4J.$$

ce qui donne

$$J = \frac{1}{8}+\frac{3}{4}I.$$

③ Remarquons que

$$K = J + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{(x^4+1)^2}}_{K'}.$$

Dans la dernière intégrale, effectuons le changement de variable $X = x^2$,

$$K' = \int_0^1 \frac{2xdx}{(x^4+1)^2} = \int_0^1 \frac{dX}{(X^4+1)^2}.$$

En intégrant par parties l'intégrale cette intégrale, on obtient K' :

$$\int_0^1 \frac{dX}{X^2+1} = \left[\frac{1}{X^2+1}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{X^2dX}{(X^2+1)^2} = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{dx}{(X^2+1)^2} - 2K'.$$

Soit

$$K' = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dX}{1+X^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

d'où

$$K = J + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16}.$$

Exercice 5.4.11. ☞

① Calculer $I_{2n+1} - I_{2n-1}$ sachant que

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

En déduire la valeur de I_{2n+1}.

② Calculer $I_{2n} - I_{2n-2}$ sachant que

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt, \ n \in \mathbb{N}.$$

En déduire la valeur de I_{2n}.

③ Soit f une fonction continue telle que $f(x) = f(a+b-x)$. Montrer qu'on a

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

En déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{xdx}{1+\sin x} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

④ Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2x\ell\text{n}x}{(1+x^2)^2}dx, \qquad J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{2x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx \quad \text{et} \quad K_1 = \int_0^{-a} \frac{dx}{x^3+x+1}$$

a étant une racine de l'équation $x^3+x+1=0$.

Solution.

① On a pour chaque entier n

$$I_{2n+1} - I_{2n-1} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos ntdt = 0.$$

Ainsi

$$I_{2n+1} = I_{2n-1} = \cdots = I_3.$$

Or

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3t}{\sin t}dt = (1+2\cos 2t)dt = \frac{\pi}{2}.$$

② De même on a

$$I_{2n} - I_{2n-2} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n-1)tdt = \frac{2}{2n-1}(-1)^{n-1}.$$

Soit que

$$\begin{aligned} I_{2n} &= I_2 + 2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-3}}{2n-5}+\frac{(-1)^{n-2}}{2n-3}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) \\ &= 2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{(-1)^{n-3}}{2n-5}+\frac{(-1)^{n-2}}{2n-3}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) \end{aligned}$$

puisque $I_2 = 2$.

③ Pour la première relation, poser $y = a + b - x$. Pour le calcul, choisir $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$. Ainsi, en posant le changement de variables $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$, on obtient

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{1+\sin x} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour le calcul de J considérons la fonction $f(x) = \sin x 1 + \cos^2 x$. Pour tout $x \in [0, \pi]$ on a $f(\pi - x) = f(x)$. Donc

$$J = \int_0^{\pi} xf(x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Posons $u = \cos x$, on a

$$J = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} [\arctan x]_{-1}^{+1} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

④ L'intégrale $I_{A,\varepsilon} = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{2x\ell\text{n}x}{(1+x^2)^2}\, dx$ se calcul par parties en posant

$$u = \ell\text{n}x \qquad \text{et} \qquad dv = \frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_{A,\varepsilon} &= \left[-\frac{\ell\text{n}x}{1+x^2}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{dx}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{\ell\text{n}A}{1+A^2} + \frac{\ell\text{n}\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{A} 2xdx1 + x^2 \\ &= -\frac{\ell\text{n}A}{1+A^2} + \ell\text{n}\frac{A}{\sqrt{1+A^2}} + \ell\text{n}\varepsilon\left(\frac{1}{1+\varepsilon^2} - 1\right) + \frac{1}{2}\ell\text{n}(1+\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Or $I_1 = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to \infty}} I_{A,\varepsilon} = 0$, alors

$$\int_0^{\infty} \frac{x\ell\text{n}x}{(1+x^2)^2} dx = 0.$$

Même remarque, on a $J_1 = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ A \to \infty}} J_{A,\varepsilon}$ où $J_{A,\varepsilon} = \displaystyle\int_{\varepsilon}^{A} \frac{2x}{(1+x^2)^2} \arctan x dx$. On fait une intégration par parties en posant $u = \arctan x$ et $dv = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Ainsi

$$J_{A,\varepsilon} = \left[\frac{\arctan x}{1+x^2}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{\varepsilon}^{A} \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

La valeur de la dernière intégrale s'obtient par une intégration par parties de $\int_\varepsilon^A \frac{dx}{1+x^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan A - \arctan\varepsilon \\ &= \left[\frac{x}{1+x^2}\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{A}{1+A^2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + 2\int_\varepsilon^A \frac{dx}{1+x^2} - \int_\varepsilon^A \frac{dx}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Soit que

$$\int_\varepsilon^A \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{1+A^2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right] + \frac{1}{2}\left[\arctan A - \arctan\varepsilon\right]$$

ou encore

$$J_{A,\varepsilon} = \frac{\arctan A}{1+A^2} - \frac{\arctan\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + 12\left[\frac{A}{1+A^2} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} + \arctan A - \arctan\varepsilon\right].$$

Et

$$J_1 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A\to\infty}} J_{A,\varepsilon} = \frac{\pi}{4}.$$

On peut écrire $x^3+x+1 = (x-a)\left(x^2+ax-\frac{1}{a}\right)$ et le polynôme $\left(x^2+ax-\frac{1}{a}\right)$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. Par suite, on a lé décomposition

$$\frac{1}{x^3+x+1} = -\frac{a}{2a+3}\frac{1}{x-a} + \frac{a}{2a+3}\frac{x+2a}{x^2+ax-\frac{1}{a}}.$$

D'autre part, on a

$$x^2+ax-\frac{1}{a} = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^3+4}{4a}\right) = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-3}{4a}\right).$$

Puisque $a^3+4 = a^3+1+3 = -a+3$. Mais $\frac{a-3}{4a} > 0$ et s'écrit sous la forme α^2, d'où

$$x^2+ax-\frac{1}{a} = \alpha^2\left[1+\frac{1}{\alpha^2}\left(x+\frac{a}{2}\right)^2\right] = \alpha^2\left[1+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{a}{2\alpha}\right)^2\right].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{x+2a}{x^2+ax-\frac{1}{a}}\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{-a}\frac{2x+a}{x^2+ax-\frac{1}{a}}\,dx + \frac{3}{2\alpha^2}\int_0^{-a}\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{a}{2\alpha}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ell n\left(x^2+ax-\frac{1}{a}\right)\right]_0^{-a} + \frac{3}{2\alpha^2}(-2\alpha)\arctan\frac{a}{2\alpha} \\ &= -\frac{3}{\alpha}\arctan\frac{a}{2\alpha}.\end{aligned}$$

Exercice 5.4.12. ☞ On désigne par $I(a,b)$ l'intégrale

$$I(a,b) = \int_a^b \frac{(1-x^2)dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}.$$

① Montrer que $I(a,b) = I(-a,-b)$ et que si a et b sont de mêmes signes, on a

$$I(a,b) = I\left(\frac{1}{a}, 1b\right).$$

Etablir enfin que

$$I = \left(a, \frac{1}{a}\right) = 0.$$

② Calculer $I(a,b)$. On pourra traiter d'abord le cas ou a et b sont supérieure à 1 et prendre comme variable $t = x + \dfrac{1}{x}$.

Solution.

① On prend pour variable $u = -x$

$$I(a,b) = \int_{-a}^{-b} \frac{1-u^2}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}(-du) = -I(-a,-b) = I(-b,-a).$$

Si a et b sont de même signe, $v = \dfrac{1}{x}$ définit un changement de variables continu sur $[a,b]$ et

$$\begin{aligned}
I(a,b) &= \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{(1-v^{-2})}{(1+v^{-2})\sqrt{1+v^{-4}}}(-v^{-2})dv \\
&= \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \frac{(1-v^2)dv}{(1+v^2)\sqrt{1+v^{-4}}}dv \\
&= I\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right).
\end{aligned}$$

En particulier $I\left(a, \dfrac{1}{a}\right) = I\left(\dfrac{1}{a}, a\right) = 0.$

② La fonction $t : x \to x + \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{b}} \dfrac{1}{x}$ est continue et dérivable si $x \neq 0$. Sa dérivée est $t' = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ et son tableau de variations montre que si a et b sont supérieurs à 1, cette fonction t définit donc un homomorphisme différentiable de $[a,b]$ dans $[\alpha,\beta]$ ou $\alpha = a + \dfrac{1}{a}$ et $\beta = b + \dfrac{1}{b}$ et alors

$$I(a,b) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{-dt}{t\sqrt{t^2-2}} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{t}\right]_{\alpha}^{\beta}.$$

Ce qui donne

$$I(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1} - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}\right] \quad \text{si } a \text{ et } b \text{ sont supérieurs à } 1.$$

Si $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ alors $\dfrac{1}{a} > 1$ et $\dfrac{1}{b} > 1$ par suite

$$I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1} - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}\right] = I(a,b).$$

Si $0 < a \leq 1 \leq b$, on obtient

$$\begin{aligned} I(a,b) &= I\left(a,\frac{1}{a}\right) + I\left(\frac{1}{a},b\right) = 0 + I\left(\frac{1}{a},b\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1} - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}\right]. \end{aligned}$$

La valeur de $I(a,b)$ est donc connue si a et b sont tous deux positifs. Si a et b sont tous deux négatifs, on a $I(a,b) = I(-a,-b)$. Enfin les fonctions $a \to I(a,b)$ ou $b \to I(a,b)$ sont des fonctions continues puisque I est l'intégrale d'une fonction continue. On obtient donc en prenant a du même signe que b

$$I(0,b) = \lim_{a\to 0} I(a,b) = \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1}.$$

D'où la formule générale

$$I(a,b) = I(0,b) - I(0,a) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\arcsin\frac{b\sqrt{2}}{b^2+1} - \arcsin\frac{a\sqrt{2}}{a^2+1}\right].$$

5.5 Problèmes corrigés

Énoncé 1

Calculer l'intégrale suivante $I = \displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

Solution 1

On peut écrire $-x^2+4x-3 = 1-(x-2)^2$ d'où

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}.$$

Faisons un changment de variables : $x-2 = \sin(t)$. Il s'en suit que $x \in [2,3]$ si et seulement si $(x-2) \in [0,1]$. Ainsi, $t = \arcsin(x-2)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $dx = \cos(t)dt$. Donc

$$\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}$$

Mais $\sqrt{1-\sin^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.

Énoncé 2

Pour $a \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin \pi x dx$. Calculer I_0, I_1 et établir la formule de récurrence $\pi^2 I_n = \pi - (n-1)nI_{n-2}$. Montrer que I_n tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Solution

Les premières intégrale I_0 et I_1 ont pour valeur

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 \sin \pi x dx = \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 2 \\
I_1 &= \int_0^1 x \sin \pi x dx = \left[-\frac{x\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x} dx \\
&= \frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.
\end{aligned}$$

On a intégré par parties en posant $u = x$ et $dv = \sin \pi x dx$, donc $du = dx$ et $v = -\dfrac{\cos \pi x}{\pi}$. Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sin \pi x dx = \left[-\frac{x^n cos\pi x}{x-\pi}\right]_0^1 + \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos \pi x dx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi}\left[\frac{x^{n-1}\sin \pi x}{\pi}\Bigg|_0^1 - \frac{n-1}{\pi}\int_0^1 x^{n-2}\sin \pi x dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{(n-1)n}{\pi^2} I_{n-2}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a $0 \leq I_n = \int_0^1 x^n \sin \pi x dx \leq \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1}$. D'où $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. ◆

Énoncé 3

Peut-on prolonger par continuité la fonction $x \to \dfrac{\sin \pi x}{1-x}$ au point $x = 1$? Montrer, ensuite, que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x}dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n \frac{\sin \pi x}{1-x}dx = 0$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)\sin \pi x dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}dx$.

Solution. Posons $X = 1 - x$. Alors, au voisinage de 0, on a

$$\frac{\sin \pi x}{1-x} = \frac{\sin(\pi - \pi X)}{X} = \frac{\sin \pi X}{X} \simeq \frac{\pi X}{X}.$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{1-x} = \pi$. On obtient un prolongemet par continuité en posant $f(1) = \pi$. Comme la fonction à intégrer est continue sur l'intervalle $[0, \pi]$, son intégrale existe sur cet intervalle. De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Ainsi la fonction $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $[0, \pi]$, son intégrale existe donc sur cet intervalle. Posons $u = 1 - x$, donc $du = -dx$ et

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x}dx = \int_0^1 \frac{\sin \pi u}{u}du = \int_0^\pi \frac{\sin v}{v}dv.$$

La fonction $x \to \dfrac{\sin \pi x}{1-x}$ qui est continue sur $[0, 1]$ est bornée sur cet intervalle par un certain nombre positif M. Ce qui donne

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1-x}dx\right| \leq M\int_0^1 x^n dx = \frac{M}{n+1}.$$

Ainsi
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n\frac{\sin\pi x}{1-x}=0.$$
D'après ce qui précède, on a
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(1+x+\cdots+x^n)\sin\pi x dx=\int_0^1\frac{\sin\pi x}{1-x}=\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx.$$ ◆

Énoncé 4

Soit la fonction définie par
$$f(x)=\int_0^\pi \ell\text{n}(1-2x\cos t+x^2)dt.$$

① Montrer que pour tout $x\neq\pm1$, la fonction $f(x)$ est bien définie au sens de Riemann. On suppose désormais la condition $x\neq\pm1$ satisfaite.

② Montrer par un changement de variables que f est paire.

③ Montrer de même que $f(x)+f(-x)=f(x^2)$.

④ En déduire que
$$f(x)=\frac{1}{2^n}f(x^{2^n}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

④ Montrer que pour tout $x\neq\pm1$ on a
$$|f(x)|\leq 2\pi\ell\text{n}(1+|x|).$$
En déduire que $f(y)$ tend vers 0 quand y tend vers 0, puis que si $|x|<1$ on a $|f(x)|=0$.

⑥ Montrer que pour tout $x\in\{0,1,-1\}$ on a
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)-\pi\ell\text{n}(x^2).$$
En déduire la valeur de $f(x)$ lorsque $|x|>1$.

Solution.

① Si $x \neq \pm 1$, on a

$$1 - 2x\cos t + x^2 = g(t) = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

On ne peut avoir $g(t) = 0$ que si $x - \cos t = \sin t = 0$. Or $\sin t = 0$ donne $\cos t = \pm 1$, mais $x - \cos t \neq 0$ puisque $x \neq \pm 1$. Donc $1 - 2x\cos t + x^2 > 0$ et par suite la fonction $x \to \ell\text{n}(1 - 2x\cos t + x^2)$ est définie et continue comme composée de fonctions continues. Elles est donc intégrables au sens de Riemann sur le segment fermé borné $[0, \pi]$.

② Dans $f(-x)$, on fait le changement de variables $u = \pi - t$. Ce qui donne $f(-x) = f(x)$, dnc f est une fonction paire.

③ Dans le calcul suivant, on fait le changement de variables $2t = u$ et $dt = du$ ce qui donne les égalités

$$\begin{aligned}
f(x) + f(-x) &= \int_0^{\pi} [\ell\text{n}(1 - 2x\cos t + x^2)(1 + 2x\cos t + x^2)]dt \\
&= \int_0^{\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2(2\cos^2 t - 1)]dt + \int_0^{\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2\cos 2t]dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2\cos u]du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2\cos u]du + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2\cos u]du
\end{aligned}$$

Posons dans la dernière intégrale : $v = 2\pi - u$, il vient que

$$\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2\cos u]du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ell\text{n}[1 + x^4 - 2x^2\cos v]dv.$$

Ainsi $f(x) + f(-x) = f(x^2)$.

④ Comme $f(-x) = f(x)$, on a $f(x) = \frac{1}{2}f(x^2)$. La relation est donc vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons que $2^n f(x) = f\left[x^{2^n}\right]$ pour $n \geq 0$. Mais

$$x^{2^{n+1}} = x^{2^n.2} \implies f\left[x^{2^n}\right] = \frac{1}{2}f\left[x^{2^{n+1}}\right].$$

Alors $f\left[x^{2^{n+1}}\right] = 2^{n+1}f(x)$. La récurrence est démontrée.

④ Pour tout t et pour tout $y \neq \pm 1$, on a

$$0 < 1 - 2y\cos t + y^2 \leq 1 + 2|y|.|\cos t| + y^2 \leq 1 + 2|y| + y^2 = (1+|y|)^2.$$

La fonction ℓn étant strictement croissante, on a

$$\ell\text{n}(1 - 2y\cos t + y^2) \leq \ell\text{n}(1+|y|)^2 = 2\ell\text{n}(1+|y|).$$

Ainsi

$$|f(y)| \leq \int_0^\pi |\ell\text{n}(1 - 2y\cos t + y^2)|dt \leq \int_0^\pi 2\ell\text{n}(1+|y|)dt = 2\pi\ell\text{n}(1+|y|).$$

Quand $y \to 0$, $\ell\text{n}(1+|y|) \to \ell\text{n}1 = 0$ car la fonction ℓn est continue. Donc à fortiori, $\lim_{y/to0}|f(y)| = 0$. Ainsi, en posant $y = \dfrac{1}{2^n}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$,

$$f(x) = \lim_{y\to 0} yf(y) = 0.$$

⑥ Soit $x \notin \{0, 1, -1\}$ et considérons $f(x) = \int_0^\pi \ell\text{n}(1-2x\cos t+x^2)dt$. Posons $y = \dfrac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \ell\text{n}\left(1 - \frac{2}{y}\cos t + \frac{1}{y^2}\right)dt = \int_0^\pi \left[\ell\text{n}(1 - 2y\cos t + y^2) - \ell\text{n}y^2\right]dt \\ &= f(y) - \pi\ell\text{n}(y^2). \end{aligned}$$

Soit

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + \pi\ell\text{n}\left(\frac{1}{x^2}\right) = f(x) - \pi\ell\text{n}(x^2).$$

Si $|x| > 1$, on a $\left|\dfrac{1}{x}\right| < 1$ et par suite $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$. Soit $f(x) = \pi\ell\text{n}(x^2)$ si $|x| > 1$.

Énoncé 5

Soit a un nombre réel positif.

① Montrer que la fonction f_a telle que $f_a = x^a\ell\text{n}x$ est prolongeable par continuité en $x = 0$. Calculer $\int_0^1 f_a(x)dx$.

②

③

④

④

⑥

Solution.

① La fonction f_a est définie, continue, pour tout $x > 0$ et $a > 0$. Comme $\lim_{x \to 0^+} x^a \ell\text{n}x = 0$ car $a > 0$, on peut prolonger f_a par continuité en posant $af_a(0) = 0$. On calcul l'intégrale par parties en posant $u = \ell\text{n}x$ et $dv = x^a dx$ donc $v = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^a \ell\text{n}x dx &= \left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\ell\text{n}x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^a}{a+1}dx \\ &= -\int_0^1 \frac{x^a}{a+1}dx = -\frac{1}{(a+1)^2}. \end{aligned}$$

② Pour les mêmes raisons que dans la première question, on peut prologer g_a par continuité en 0 en posant $g_a(0) = 0$. Par ailleurs

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{x+1}.\frac{\ell nx}{x-1} = \lim_{u\to 0^+} \frac{(1+u)^a}{2+u}.\frac{\ell n(1+u)}{u} = \frac{1}{2}.$$

On a posé $x = 1+u$ et $\ell n(1+u) \simeq u$ au voisinage de 0. Ainsi, on peut prolonger g_a par continuité au voisinage de 1 en posant $g_a(1) = \dfrac{1}{2}$.

③ L'intégrale I_n est bien définie car d'après 2), c'est l'intégrale d'une fonction continue. De plus, on a

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 \left[\frac{(x^{2n+3} - x^{2n+1})\ell nx}{x^2-1}\right] dx \\ &= \int_0^1 x^{2n+1}\ell nx = f_{2n+1}(x)dx \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$I_{n+1} - I_n = \frac{-1}{4(n+1)^2}.$$

④ Décomposons l'intervalle $[1,p]$ en $(p-1)$ intervalles égaux de longueur 1 et soit $[i,i+1]$ l'un d'entre eux. Sur $[i,i+1]$ on a $\dfrac{1}{x^2} \geq \dfrac{1}{(i+1)^2}$ et même strictement supérieur sur un intervalle ouvert non vide contenu dans $i,i+1[$. Donc

$$\int_i^{i+1} \frac{dx}{x^2} > \frac{1}{(i+1)^2}.$$

En ajoutant les inégalités obtenues pour les différentes valeurs entières de i entre 1 et $p-1$, on trouve l'inégalité demandée

$$\int_1^p \frac{dx}{x^2} > \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{(i+1)^2}.$$

Par récurrence, on a

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= -\frac{1}{4(n+1)^2} \\ I_n - I_{n-1} &= -\frac{1}{4n^2} \\ \vdots &= \vdots \\ I_1 - I_0 &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre, il vient que

$$I_n = I_0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2}.$$

La suite $\left(\sum_{i=O}^{n-1} \dfrac{1}{(i+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et

$$\sup_n \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \sup_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Elle est donc convergente. La suite $(I_n)_n$ est aussi convergente.

④ Pour $0 < x < 1$, ℓnx et $x^2 - 1$ sont tous les deux négatifs. D'où

$$\frac{x\ell nx}{x^2-1} > 0, \quad x \in]0,1[.$$

Par ailleurs

$$\frac{x\ell nx}{x^2-1} < \frac{1}{2} \iff 2x\ell nx - x^2 + 1 > 0$$

car $x^2 - 1 < 0$ sur $]0,1[$. Etudios la fonction $x \to y(x) = 2x\ell nx - x^2 + 1$. Elle est définie et dérivable pour $x > 0$ et décroissante sur l'intervalle $]0,1]$. Comme $y(1) = 0$, y est positive sur $]0,1[$. Il résulte la double inégalité

$$0 < I_n = \int_0^1 x^{2n}.\frac{x\ell nx}{x^2-1}dx < \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2n}dx = \frac{1}{4n+2}.$$

Donc

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} I_n \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n+2} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

⑥ De l'égalité

$$I_n = I_0 - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i+1)^2}$$

on déduit en faisant tendre n vers $+\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = 4I_0 = 4\int_0^1 \frac{x\ell nx}{x^2-1}\,dx.$$

Énoncé 6

On considère les intégrales définies par

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2dt}{(t^4+1)}, \qquad n \leq 1,$$

trouver une relation entre J_n et J_{n-1}. Calculer J_1 et en déduire la valeur de J_2 puis J_n.

Solution. Les intégrales J_n ont un sens pour $n \geq 1$, le dénominateur t^4+1 ne s'annulant pas, et à l'infini étant équivalentes aux intégrales des fonctions $\dfrac{1}{t^{4n-2}}$ qui sont convergentes car $4n-2 > 1$. Partons de J_{n-1} pour $n > 1$ et intégrons par parties en posant

$$u = \frac{1}{(t^4+1)^{n-1}}, \quad dv = t^2 dt, \quad du = \frac{-4(n-1)t^3}{(t^4+1)} \quad \text{et} \quad v = \frac{t^3}{3}.$$

D'où en ecrivant $t^6 = t^2(t^4+1-1) = t^2(t^4+1) - t^2$. On obtient

$$\begin{aligned} J_{n-1} &= \left[\frac{t^3}{3(t^4+1)^{n-1}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{4(n-1)}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^6 dt}{(t^4+1)^n} \\ &= \frac{4(n-1)}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^4+1)^{n-1}} - \frac{4(n-1)}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^4+1)^n}. \end{aligned}$$

Etant donné que $\displaystyle\lim_{n\to\pm\infty} \frac{t^3}{3(t^4+1)^{n-1}} = 0$ pour $n-1 > 0$. D'où la relation

$$(4n-7)J_{n-1} = (4n-4)J_n.$$

Pour le calcul de J_1, on remarque que

$$t^4+1 = (t^2 + t\sqrt{2}+1)(t^2 - t\sqrt{2}+1).$$

Ce qui donne la décomposition

$$\frac{t^2}{t^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{t^2}{t^2 - t\sqrt{2}+1} - \frac{t^2}{t^2+t\sqrt{2}+1}\right].$$

Remarquons que $t^2 - t\sqrt{2}+1 = \left(t - \sqrt{2}2\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Posons $t - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}u$ ce qui donne $dt = \dfrac{\sqrt{2}}{2}du$ et l'on obtient

$$\int \frac{t}{t^2 - t\sqrt{2}+2}dt = \arctan(\sqrt{2}+t-1) + \frac{1}{2}\ell\text{n}(t^2 - \sqrt{2}t+1) + C.$$

Un calcul semblable nous donne la deuxième intégrale et enfin

$$J_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan(\sqrt{2}t+1) + \arctan(\sqrt{2}t-1) + \frac{1}{2}\ell\text{n}\left(\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Calculon maintenant J_2 à l'aide de la relation de récurrence, on obteint

$$J_2 = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

De manière générale d'après la relation de récurrence, on obtient

$$J_n = \frac{(4n-7)(4(n-1)-7)\cdots 5.1}{(4n-4)(4(n-1)-4)\cdots 8.4}.\frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Énoncé 7

On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx.$$

① Calculer I_1 et I_2.

② Etablir, pour tout entier $n \geq 1$, la rela tion

$$I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

③ Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right).\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2}{2k+1}. \end{aligned}$$

④ Vérifier que

$$I_{2n-1} > I_{2n} > I_{2n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

En déduire

$$\frac{\pi}{2}.\frac{2n}{2n+1} < \frac{2^2.4^2.\cdots.(2n)^2}{3^2.5^2.\cdots.(2n-1)^2}.\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

④ Montrer que :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} \left\{\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}\right\}.}$$

Solution.

① On a $I_1 = 1$ et

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

② On intègre par parties

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x.\sin x dx \\ &= \left[-\sin^{n+1} x.\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^2 x dx \\ &= (n+1)[I_n - I_{n+2}] \end{aligned}$$

d'où la relation cherchée.

③ En appliquant les égalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}{2n.2(n-1)\cdots 4}.I_2 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.\frac{\pi}{2} \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}.I_{2n-1} = \cdots = \frac{2n.2(n-1)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}.I_1 = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}. \end{aligned}$$

④ La différence $I_{2n-1} - I_{2n}$ s'écrit $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)dx$, où g est la fonction continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par $g(x) = \sin^{2n-1} x.(1-\sin x)$, on a alors $I_{2n-1} - I_{2n} \geq 0$ puisque la fonction g est positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et comme g est non identiquement nulle sur cet intervalle alors $I_{2n-1} - I_{2n} \neq 0$. Ainsi $I_{2n-1} - I_{2n} > 0$. Un argument similaire montre que $I_{2n} > I_{2n+1}$. Comme $I_{2n} \neq 0$ alors $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} > 1$ et en remplaçant par les valeurs trouvées, on obtient

$$2n.\left[\frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}\right]^2.\frac{2}{\pi} > 1,$$

ce qui donne après multiplication des deux membres par $\frac{2n}{2n+1}.\pi 2$

$$\frac{2^2.4^2\cdots(2n)^2}{3^2.5^2\cdots(2n-1)^2}.\frac{1}{2n+1} > \frac{2n}{2n+1}.\frac{\pi}{2}.$$

Partant de $I_{2n} > I_{2n+1}$, on obtient de façon similaire

$$\frac{2^2.4^2\cdots 2n^2}{3^2.5^2\cdots(2n-1)^2}.\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2}.$$

④ Le résultat précédent s'écrit

$$\frac{\pi}{2}.\frac{2n}{2n+1} < a_n < \frac{\pi}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

avec

$$a_n = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k-1)^2}\right).\frac{1}{2n+1} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)^2}{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1)}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2}.\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$, on en déduit que la suite (a_n) est covergente et que sa limite est $\frac{\pi}{2}$.

Énoncé 8

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de polynôme, non nul, de degré inférieure ou égal à 2 dont le nombre e soit racine. On dit que e n'est pas quadratique. On rappel la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}f^{n+1}(t)dt.$$

On suppose

$$\exists a, b, c \in \mathbb{Z} \ : \ e^2 + be + c = 0 \ \ (\Longleftrightarrow \ e + b + ce^{-1} = 0).$$

① Ecrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction e^x entre 0 et 1 puis entre 0 et -1.

② Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \quad \text{et} \quad J = \int_{-1}^0 (-1-t)^n e^t dt.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $aI_n + bJ_n$ est un entier.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.
En déduire que pour n assez grand $aI_n + cJ_n = 0$.

③ Montrer que $a = c = 0$ et que $b = 0$. (On étudiera le signe de I_n et J_n).

Solution.

① La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit dans ce cas

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x (x-t)^n \frac{e^t}{n!} dt.$$

② On applique cett formule en divers points de l'intervalle $[-1, 1]$. En $x = 1, -1$, on a alors

$$\begin{aligned} e &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^x (1-t)^n \frac{e^t}{n!} dt \\ e^{-1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} (-1-t)^n \frac{e^t}{n!} dt. \end{aligned}$$

En reportant dans $ae^{-1} + b + ce = 0$ et en multipliant par $n!$, on obtient

$$-a \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} - n!b - c \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n!}{k!} = aI_n + cJ_n.$$

Or, si $k < n$ alors $k!$ divise $n!$. On en déduit que le membre de gauche est un entier relatif.

On a $e^t < e$ pour tout $t \in [0, 1]$, donnc

$$0 \le I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \le e \int_0^1 (1-t)^n dt = e \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{n+1}.$$

De même $e^t < 1$ pour tout $t \in [-1, 0]$ et $J_n = (-1)^{n+1} \int_{-1}^{0} (1+t)^n e^t dt$. Alors

$$|J_n| \le \int_{-1}^{0} (1+t)^n dt = \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \lim_{n \to +\infty} J_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} (aI_n + bJ_n) = 0.$$

Comme $aI_n + bJ_n$ est un entier, il existe un entier N tel que pour tout $n \ge N$ tel que $|aI_n + bJ_n| < \dfrac{1}{2}$ donc $aI_n + bJ_n = 0$.

③ Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0,1]$, on a

$$(1-t)^n e^t \geq 0 \implies I_n > 0.$$

De même J_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ alors $-aI_n = cJ_n$, $I_n > 0$ et que $J_n > 0$ si n est pair et J_n si n est impair. Donc l'égalité n'a lieu que si $a = c = 0$ ce qui entraine $b = 0$.

Chapitre 6

Problèmes d'Examens non corrigés

Exercice 1.

① Soit g la fonction définie pour tout x réel par $g(x) = \int_0^x \frac{\sin 2t dt}{1+\sin^4 t}$. Pour quelles valeurs de x la fonction g est-elle dérivable ? Quelle est alors sa dérivée ?

② Calculer $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

③ Calculer l'intégale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2t}{(1+\sin^4 t)^2} dt$.

④ Chercher la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de l'expression suivantes $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2+k^4n^2}$.

④ Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x+2t)}{1+\sin^4(x+t)} dt.$$

Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée. (On pourra $u = x + t$).

⑥ Soit h la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x+2t)\cos t}{1+\sin^4(x+t)} dt.$$

Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 2.

On considère une fonction réelle f définie, continue sur $\mathbb{R}$. On suppose que les dérivées f', f'' sont continues et que f, f' et f'' sont nulles en dehors de l' intervalle compact $[a,b]$. La norme de f est définie par $\|f\| = \sup\limits_{x}|f(x)|$. Soient $t \in \mathbb{R}^+$ et h tel que $|h| \leq t$, on pose $\omega(f,t) = \sup\limits_{x,|h|\leq t} |f(x+h) - f(x)|$. ($\omega(f,t)$ est la borne supérieure des nombres $|f(x+h) - f(x)|$ quant x parcourt $\mathbb{R}$ et $|h| \leq t$).

① Calculer $\displaystyle\int_0^h f'(x+\theta)d\theta$.

② Montrer que $\omega(f,t) \leq 2\|f\|$. et $\omega(f,t) \leq t\|f'\|$.

③ Montrer que $t\|f\| \leq \omega(f,t) + k\omega(f',t)$.

④ Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, on a $\|f''\|t^2 - \|f'\|t + 2\|f\| \geq 0$.

④ En déduire que $\|f'\|^2 \leq \theta\|f\|.\|f''\|$.

Exercice 3.

Soit, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application définie sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ par $T(f)(x) = \int_0^x tf(t)dt$. $T(f)$ est dite transformée de f.

① Montrer que si $f \in \mathcal{C}$ alors $T(f) \in \mathcal{C}$, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle admet une dérivée seconde en 0 que l'on calculera.

② Montrer que l'application T est linéaire. Calculer Ker T. T est-elle injective ? surjective ?

③ Montrer que la transformée F de la fonction $x \to f(x) = \dfrac{1}{\text{ch } x}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. La calculer pour $n = 9$.

④ Calculer $T(f)$ pour

$$f(t) = t\arctan t, \qquad f(t) = \frac{1}{\text{ch}^{\,2} t} \qquad \text{et} \qquad f(t) = \frac{t^2+2}{\sqrt{(t^2+1)^3}}.$$

(On pourra effectuer le changement de changement de variable $u = t^2 + 1$).

Exercice 4.

Soit, $\mathcal{C}$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application définie sur $\mathcal{C}$ par

$$T(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt.$$

① On suppose ici $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Calculer $g = T(f)$ et donner le développement de $g(x)$ suivant les puissances de $\dfrac{1}{x}$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.

② Soit l'équation

$$f = \lambda T(f), \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \qquad (E)$$

Déterminer λ pour qu'elle admette la solution $f(x) = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$. Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ pour $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$. Etudier les variations et le graphe de φ. En déduire que si λ est donné positif, on peut déterminer α tel que $f(x) = e^{\alpha x}$ soit solution de (E).

③ Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ le sous ensembles des fonctions bornées de $\mathcal{C}$. Montrer que

$$f \in \mathcal{C} \text{ (resp. } \mathcal{B}) \implies g = T(f) \in \mathcal{C} \text{ (resp. } \mathcal{B}).$$

Montrer que si $|\lambda| < 1$, l'équation (E) n'admet dans $\mathcal{B}$ que la solution $f = 0$.

④ On définit la suite (f_n) par

$$f_0 = 1, \cdots, f_{n+1} = \lambda T(f_n) + 1.$$

Montrer que $f_n(x)$ a une valeur constante u_n. Calculer u_1, u_2 ainsi que u_n en fonction de λ. Pour quelles valeurs de λ la suite (u_n) a-t-elle une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Montrer que l'équation

$$f = \lambda T(f) + 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{C}$$

admet une solution particulière qui est la fonction constante. Montrer pour les valeurs de λ trouvées ci-dessus, que cette solution est la limite de la suite (f_n) et que (E') n'admet pas d'autre solution dans $\mathcal{B}$.

④ Dans le cas où $\lambda \in]0,1[$, former, à l'aide des résultats de 2) d'autres solutions de l'équation (E') dans $\mathcal{C}$.

Exercice 5. (Convolution de fonctions).

① Montrer que si f est une fonction périodique de période T, alors $\int_a^{a+T} f(t)dt$ ne dépend pas du réel a.

Si f et g sont deux fonctions périodiques de périodes T, on définit $f * g$ par

$$f * g(x) = \int_a^{a+T} f(x-t)g(t)dt?$$

② Montrer que $f * g$ est périodique de période T et que

$$f * g = g * f.$$

On prend désormais $T = \pi$ f et g étant les fonctions égales sur $[0, 1]$ à

$$f(t) = \sin t \quad \text{et} \quad g(t) = t$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par périodicité.

④ Calculer $f * g(x)$ pour $x \in [0, \pi]$.

④ Calculer $\int_0^\pi f(t)dt$, $\int_0^\pi g(t)dt$, $\int_0^\pi f * g(x)dx$. Vérifier que la dernière intégrale est le produit des deux premières.

Exercice 6. (Formule de Stirling)

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative, dans un repère orthonormé, du graphe de la fonction $f : x \in]0, +\infty[\to f(x) = \ell n x$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note par M_n le point de $(\mathcal{C}$ d'abscisse n et $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}'_n$ les parties bornées de $\mathbb{R}^2$ définies comme suit :
$\mathcal{A}_n$ est délimitée par $(\mathcal{C})$, l'axe ses abscisses et les droites D_1 et D_n d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$
$\mathcal{B}_n$ est délimitée par l'axe des abscisses, les droites D_1, D_n et les segments de droite $M_1M_2, M_2M_3, \cdots, M_{n-1}M_n$
$\mathcal{S}_n$ est délimitée par le segment de droite M_nM_{n+1} et l'arc de la courbe $(\mathcal{C})$ d'extrémités M_n et M_{n+1}
$\mathcal{S}'_n$ est l'ensemble des images des points de $\mathcal{S}_n$ par la translation de vecteur $\to M_{n+1}M_2$.
On désignera par a_n, b_n, s_n et s'_n les aires (arithmétiques) respectives de $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}'_n$.

① Calculer les valeurs de a_n et b_n (≥ 1) et vérifier que

$$a_n - b_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ell\mathrm{n}n - n + 1 - \ell\mathrm{n}(n!).$$

② Montrer qu'u point M' est dans S'_n si et seulement si des coordonnées (x', y') vérifient

$$\begin{cases} 1 \leq x' \leq 2 \\ (x'-1)\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) + \ell\mathrm{n}\left(\dfrac{2n}{n}\right) \leq y' \leq \ell\mathrm{n}(x'+n-1) + \ell\mathrm{n}\dfrac{2}{n+1}. \end{cases}$$

En déduire la valeur de s'_n, et vérifier que

$$s'_n = s_n, \qquad \forall n \geq 1.$$

Montrer que si n et m sont deux entiers distincts (non nuls) alors on a

$$S'_n \cap S'_m = \{M_2\}.$$

Vérifier que tous les ensembles S'_n $(n \geq 1)$ sont contenus dans le triangle M_1M_2H (où H est le point de coordonnées $(1, \ell\mathrm{n}2)$. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geq 1}$, définie par

$$d_n = \sum_{k=1}^{n} s'_k.$$

converge vers une limite finie que l'on notera d. [Indication : Noter qu'il résulte de ce qui précède que d_n est l'aire arithmétique de $S'_1 \cup S'_2 \cup \cdots \cup S'_n$].

③ Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\ell\mathrm{n}(n!) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ell\mathrm{n}n - n + 1 - d + \alpha_n, \qquad n \geq 1$$

converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

④ Déduire de la formule de Wallis que

$$\lim_{n\to+\infty}\left[2n\ell\mathrm{n}2 + 2\ell\mathrm{n}(n!) - \ell\mathrm{n}[(2n)!] - \frac{1}{2}\ell\mathrm{n}(2n+1)\right] = \ell\mathrm{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Montrer alors que

$$1 - d = \ell\mathrm{n}\sqrt{2\pi}.$$

⑤ Etablir enfin, la formule d'approximation de Stirling

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n}, \quad n \to +\infty.}$$