الاستقرارية، الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

<u>استقرارية السلاسل الزمنية</u>

يشير مفهوم استقرار السلاسل الزمنية إلى ثبات واستقرار السلوك الزمني للسلسلة حيث تكون البيانات ثابتة دوت تغيرات كبيرة أو تذبذبات على مر الزمن، نقول عن سلسلة زمنية Y_t أنها مستقرة إذا كانت خصائصها الإحصائية لا تتغير خلال الزمن، أي:

- ثبات المتوسط $E(Y_t) = E(Y_{t+k}) = \mu, \forall t \in Z$
- ثبات التباين $(Y_t) = V(Y_{t+k}) = \sigma^2, \forall t \in Z$
- ثبات التباين المشترك $Co(Y_t, Y_{t+k}) = Cov(Y_{t+k}, Y_{t+k+s}) = \gamma(k), \forall t \in Z$

يعرف <u>حد الخطأ العشوائي</u> ε_t بأنه سيرورة عشوائية محضة (سيرورة مستقرة) وهو عبارة عن تشويش أبيض يتبع التوزيع الطبيعي ذو وسط معدوم وتباين ثابت σ^2، أي:

$$\varepsilon_t \to N(0,\ \sigma^2)$$
$$E(\varepsilon_t) = 0, \forall t$$
$$V(\varepsilon_t) = \ \sigma^2, \forall t$$
$$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0, \forall t$$

يتم الكشف عن استقرار السلاسل الزمنية بإحدى الطرق التالية:

- التمثيل البياني
- ثبات الخصائص الإحصائية
- دالة الارتباط الذاتي النظرية
- اختبار الجذر الوحدوي

1. يمكن القول أن سلسلة زمنية مستقرة نظرا لتمثيلها البياني (تمثيل قيم السلسلة بالنسبة للزمن)، بشرط أن يكون شكلها الملاحظ لا يظهر أي اتجاهات لا نحو الأعلى ولا نحو الأسفل، كما هو موضح بالشكل التالي:

الاستقرارية، الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

2. إذا كان من الصعب تحديد استقرار السلسلة الزمنية Y_t من خلال تمثيلها البياني، يتم اللجوء إلى دراسة الخصائص الإحصائية للسلسلة من خلال تقسيم السلسلة إلى نصفين متساويين (Y_{t1}, Y_{t2}) وحساب كل من المتوسط الحسابي، التباين والتباين المشترك لكل نصف. تعتبر السلسلة الزمنية Y_t مستقرة إذا تحققت الشروط التالية:

ثبات المتوسط $$E(Y_{t1}) = E(Y_{t2})$$

ثبات التباين $$V(Y_{t1}) = V(Y_{t2})$$

ثبات التباين المشترك وانعدامه أو شبه انعدامه $$Cov(Y_{t1}, Y_{t1+k}) = Cov(Y_{t2}, Y_{t2+k}) = 0$$

للجزم باستقراريه السلسلة الزمنية يتم اللجوء إلى دراسة معنوية معاملات الارتباط أو اختبار جذر الوحدة:

3. يتم الاعتماد على دالة الارتباط الذاتي النظرية (دالة الارتباط الذاتي AC ودالة الارتباط الذاتي الجزئي PAC):

1.3. دالة الارتباط الذاتي AC

تهتم دالة الارتباط الذاتي بدراسة العلاقة بين قيم السلسلة فيما بينها والكشف عن الارتباطات الداخلية للسلسلة، وتكتب بالعلاقة التالية:

$$\rho_k = \frac{Cov(Y_t + Y_{t+K})}{\sqrt{V(Y_t) * V(Y_{t+K})}} = \frac{\sum_1^{n-k}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_1^n (Y_t - \bar{Y})^2 (Y_{t+k} - \bar{Y})^2}} = \frac{\sum_1^{n-k}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sum_1^n (Y_t - \bar{Y})^2}$$

حيث:

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_{-k} = \rho_k$$

$$|\rho_k| \leq 1$$

- **إذا كانت قيمة الارتباط تقترب من 1 فهذا يدل على ارتباط موجب**
- **إذا كانت قيمة الارتباط تقترب من -1 فهذا يدل على ارتباط سالب**
- **تنقص قيمة الارتباط بزيادة الفاصل الزمني k بين القيم**

2.3. دالة الارتباط الذاتي الجزئي PAC

تستخدم لقياس التشابه بين قيمتين في سلسلة زمنية بعد إزالة تأثير القيم الوسيطية، تسمح لنا دالة الارتباط الذاتي الجزئي بدراسة العلاقات بين القيم بشكل أدق، إذ تقلل من التأثيرات التي قد تنتج عن الظواهر طويلة المدى كالاتجاهات الزمنية، تغيرات الدورية والتغيرات العشوائية. تعرف دالة الارتباط الذاتي الجزئي بالعلاقة التالية:

$$\rho_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_{k-1,i} * \rho_{k-i}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_{k-1,i} * \rho_i}$$

حيث:

$$\rho_{ki} = \rho_{k-1,i} - \rho_{kk}\rho_{k-1,k-1}$$

$$\rho_{11} = \rho_1$$

$$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_{11} * \rho_1}{1 - \rho_{11} * \rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

- **نقول عن سلسلة زمنية أنها مستقرة إذا تحققت الفرضية الصفرية $H_0: \rho_k = 0$، $H_0: \rho_{kk} = 0$. لاختبار معنوية معاملات الارتباط نعتمد على مجال الثقة حيث نعتبر أن معامل الارتباط كمتغير يتبع التوزيع الطبيعي $\rho_k \to N\left(0, {}^{1}/_{n}\right)$ ، $\rho_{kk} \to N\left(0, {}^{1}/_{n}\right)$ (n: حجم العينة):**

  مجال الثقة لمعاملات الارتباط عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ هو: $CI = \pm 1.96/\sqrt{n}$

  - **إذا كان: $\rho_k \in CI$، نقبل الفرضية H_0، أي أن معاملات الارتباط غير معنوية $\rho_k = 0$ ومنه فإن السلسلة مستقرة**
  - **إذا كان: $\rho_{kk} \in CI$، نقبل الفرضية H_0، أي أن معاملات الارتباط غير معنوية $\rho_{kk} = 0$ ومنه فإن السلسلة مستقرة**

- **بمكن اجراء اختبار مشترك لمعنوية معاملات الارتباط بافتراض $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$، $H_0: \rho_{11} = \rho_{22} = \cdots = \rho_{kk} = 0$ وذلك بحساب إحصائية $Box - Pierce$ بالعلاقة التالية:**

$$\varphi = n\sum \hat{\rho}_k^2 \to X_\alpha^2(k)$$

$X_\alpha^2(k)$: القيمة الحرجة (المجدولة) لتوزيع كاي تربيع (khi−deux)

- إذا كان: $\varphi > X_\alpha^2(k)$، نرفض الفرضية H_0، أي أن السلسلة غير مستقرة
- إذا كان: $\varphi < X_\alpha^2(k)$، نقبل الفرضية H_0، أي أن كل معاملات الارتباط مساوية للصفر وهذا يعني أن السلسلة مستقرة

في حالة العينات الصغيرة $n < 30$ تكون نتائج الاختبار المشترك المعتمد على إحصائية $Box - Pierce$ غير دقيقة، ولهذا يتم الاعتماد على الإحصائية المعدلة لـ $Box - Pierce$ المعروفة بـ $Ljung - Box$ التي تكتب بالعلاقة التالية:

$$\varphi^* = n(n+2)\sum \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \to X_\alpha^2(k)$$

4. اختبار الجذر الوحدوي: اختبار احصائي يستخدم للكشف عن استقراريه السلاسل الزمنية، الفرضية الأساسية لهذا الاختبار هي أن السلسلة الزمنية تحتوي على جذور الوحدة، توجد العديد من اختبارات جذر الوحدة أهمها اختبار ديكي فوار $Dickey - Fuller \ \ DF$

يجب التمييز بين نوعين من النماذج غير المستقرة:

- نماذج غير مستقرة من نوع $TS: Trend\ Stationary$ تكون من الشكل $Y_t = f(t) + \varepsilon_t$، حيث $f(t)$ دالة كثيرة حدود. أكثر النماذج انتشارا من نوع TS تكتب من الشكل: $y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$. تستقر هذه النماذج بحذف الاتجاه العام من السلسلة: $Y_t - (\alpha + \beta t)$ (النموذج الجمعي) أو $\frac{Y_t}{\alpha+\beta t}$ (النموذج الضربي)
- نماذج غير مستقرة من نوع $DS: Differncy\ Stationary$، تكتب بإحدى الأشكال التالية:

$$y_t = \emptyset Y_{t-1} + \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$
$$y_t = \emptyset Y_{t-1} + \alpha + \varepsilon_t$$
$$y_t = \emptyset Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

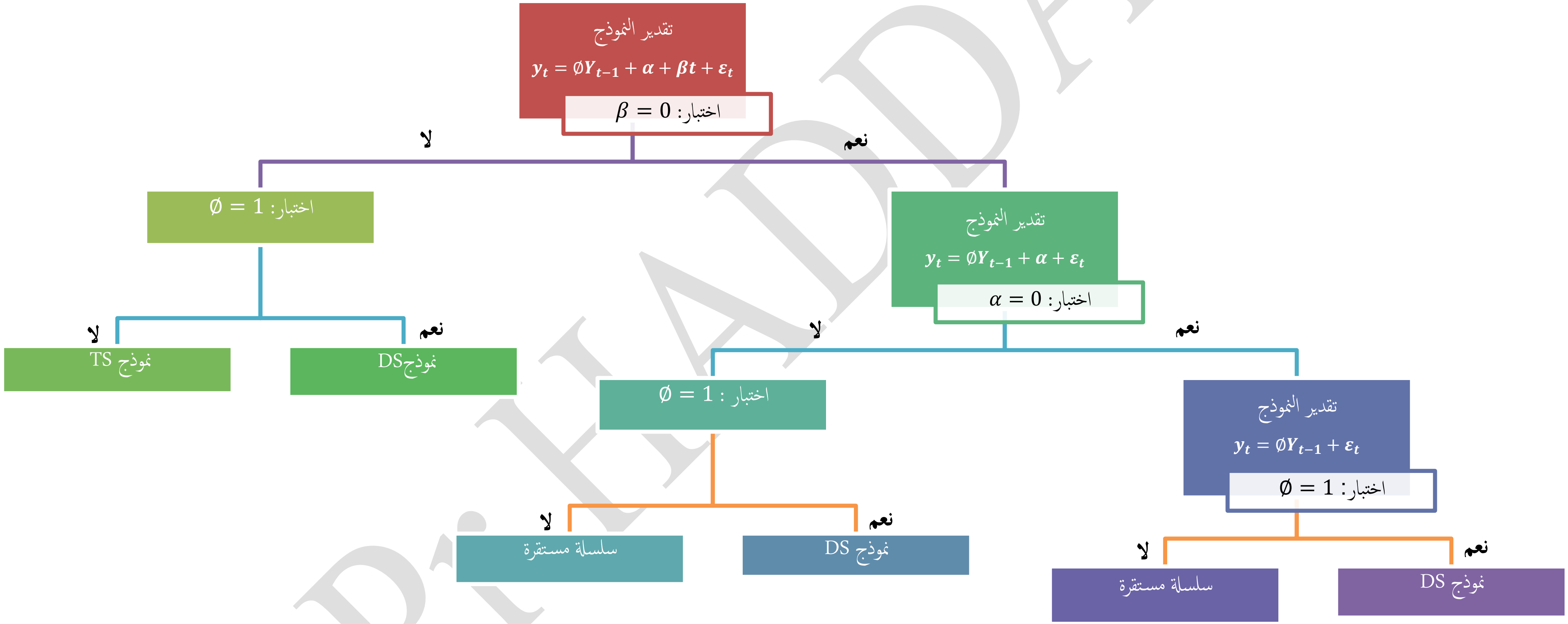
إن استعمال الفروقات ∇^d على النماذج من نوع DS تجعلها مستقرة، حيث $\mathrm{d} = 0, 1, 2, ..$ هي درجة التكامل، نقول عن سلسلة زمنية أنها متكاملة عند المستوى أو متكاملة من الرتبة 0 أي: $I(0)$ إذا كانت مستقرة، وتكون متكاملة من الرتبة الأولى $I(1)$ إذا كانت السلسلة مستقرة بعد الفروقات الأولى، مثال:

الاستقرارية، الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

$Y_t = \alpha + \varepsilon_t$ متكاملة عند المستوى $I(0)$، Y_t سلسلة مستقرة

$Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t$ متكاملة من الدرجة الأولى $I(1)$ أي أن السلسلة Y_t تستقر بعد الفروقات الأولى $\nabla^1 Y_t = Y_t - Y_{t-1} = \varepsilon_t$، $\nabla^1 Y_t$ سلسلة مستقرة

المخطط التالي يوضح الخطوات المنهجية لتطبيق اختبارات جذر الوحدة:



الاستقرارية، الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

يرتكز اختبار DF على دراسة صحة الفرضية الصفرية $H_0: \emptyset = 1$، بالاعتماد على إحصائية ستيودنت $t_{cal} = \frac{\widehat{\emptyset}}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\emptyset}}}$ ومقارنتها بالقيمة الحرجة t_{tab} المستخرجة من جدول ديكي فولر.

- إذا كانت: $t_{cal} > t_{tab}$ نرفض الفرضية الصفرية H_0، أي أن السلسلة مستقرة

مثال: قدر الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي بين قيم السلسلة Y_t لما $k = 1,2,3$، هل السلسلة Y_t مستقرة؟

t	Y_t	$Y_t - \bar{Y}$	$(Y_t - \bar{Y})^2$	Y_{t+1}	$Y_{t+1} - \bar{Y}$	Y_{t+2}	$Y_{t+2} - \bar{Y}$	Y_{t+3}	$Y_{t+3} - \bar{Y}$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+1} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+2} - \bar{Y})$	$(Y_t - \bar{Y})(Y_{t+3} - \bar{Y})$
1	15	0	0	25	10	5	−10	15	0	0	0	0
2	25	10	100	5	−10	15	0	15	0	−100	0	0
3	5	−10	100	15	0	15	0	/	/	0	0	/
4	15	0	0	15	0	/	/	/	/	0	/	/
5	15	0	0	/	/	/	/	/	/	/	/	/
	75	0	200							−100	0	0

$$\rho_1 = \frac{\sum(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+1}-\bar{Y})}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2} = \frac{-100}{200} = -0.5 \qquad \rho_{11} = \rho_1 = -0.5$$

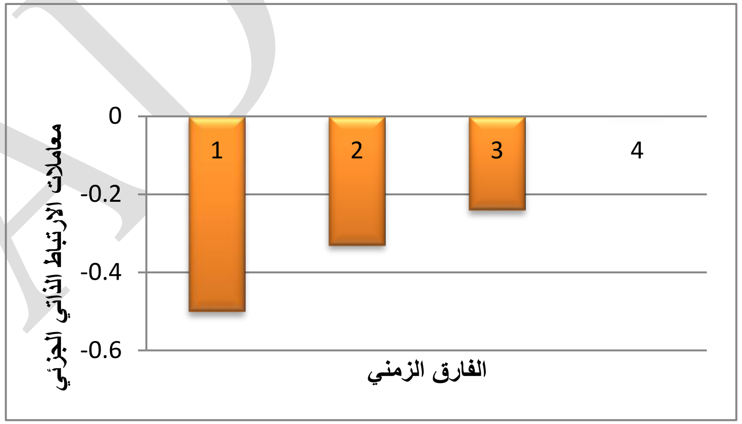
$$\rho_2 = \frac{\sum(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+2}-\bar{Y})}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2} = \frac{0}{200} = 0 \qquad \rho_{22} = \frac{\rho_2-\rho_{11}*\rho_1}{1-\rho_{11}*\rho_1} = \frac{0-(-0.5)(-0.5)}{1-(-0.5)(-0.5)} = -0.33 \qquad \rho_{21} = \rho_{11} - \rho_{22}\rho_{11} = -0.5 - (-0.33)(-0.5) = -0.66$$

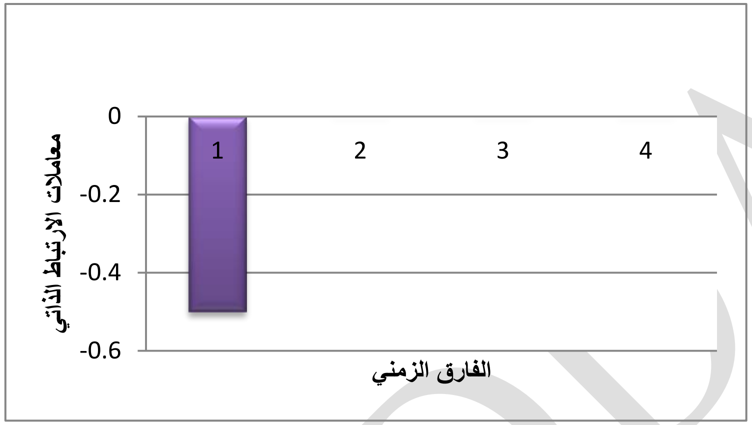
$$\rho_3 = \frac{\sum(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+3}-\bar{Y})}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2} = \frac{0}{200} = 0 \qquad \rho_{33} = \frac{\rho_3-(\rho_{21}*\rho_2+\rho_{22}*\rho_1)}{1-(\rho_{21}*\rho_1+\rho_{22}*\rho_2)} = \frac{0-((-0.66)0+(-0.33)(-0.5))}{1-((-0.66)(-0.5)+(-0.33)0)} = -0.24$$

$$\rho_4 = \frac{\sum(Y_t-\bar{Y})(Y_{t+4}-\bar{Y})}{\sum(Y_t-\bar{Y})^2} = \frac{0}{200} = 0 \qquad \rho_{44} = \frac{\rho_4-(\rho_{31}*\rho_3+\rho_{32}*\rho_2+\rho_{33}*\rho_3)}{1-(\rho_{31}*\rho_1+\rho_{32}*\rho_2+\rho_{33}*\rho_3)} = 0$$

الاستقرارية، الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي

يكون تمثيل معاملات الارتباط الذاتي بالشكل التالي **Correlograme**:





k	1	2	3	4
ρ_k	-0.5	0	0	0
ρ_{kk}	-0.5	-0.33	-0.24	0

- **دراسة استقرار السلسلة الزمنية Y_t**

1. مجال الثقة لمعاملات الارتباط الذاتي يساوي: $CI = \frac{\pm 1.96}{\sqrt{5}} = \pm 0.87$

$$H_0: \rho_k = 0$$

$$H_1: \rho_k \neq 0$$

$\rho_{kk} \in CI, \forall k = \overline{1,4}$ و $\rho_k \in CI, \forall k = \overline{1,4}$، إذا نقبل الفرضية الصفرية أي أن معاملات الارتباط معنويا تساوي 0 (أي لا توجد علاقة ترابط بين قيم السلسلة مع بعض)، ومنه فإن السلسلة مستقرة.

2. اختبار $Ljung - Box$:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 0$$

$$\varphi^* = 5(5+2)\sum \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} = 35\left(\frac{(-0.5)^2}{4} + \frac{(0)^2}{3} + \frac{(0)^2}{2} + \frac{(0)^2}{1}\right) = 2.18$$

$\varphi^* = 2.18 < X^2_{0.05}(4) = 9.488$، إذا نقبل الفرضية الصفرية Y_0، أي أن كل معاملات الارتباط معنويا تساوي 0، ومنه فإن السلسلة مستقرة

اصْبِرْ عَلَى مُرِّ الْجَفَا مِنْ مُعَلِّمٍ   فَإِنَّ رُسُوبَ الْعِلْمِ فِي نَفَرَاتِهِ
وَمَنْ لَمْ يَذُقْ مُرَّ التَّعَلُّمِ سَاعَةً   تَجَرَّعَ ذُلَّ الْجَهْلِ طُولَ حَيَاتِهِ
وَمَنْ فَاتَهُ التَّعْلِيمُ وَقْتَ شَبَابِهِ   فَكَبِّرْ عَلَيْهِ أَرْبَعًا لِوَفَاتِهِ
وَذَاتُ الْفَتَى وَاللهِ بِالْعِلْمِ وَالتُّقَى   إِذَا لَمْ يَكُونَا لَا اعْتِبَارَ لِذَاتِهِ