Chapitre II

GENERALITES ET DEFINITIONS DE BASE

2.1) Point matériel :

Les objets matériels qui, dans certaines circonstances, peuvent être considérés comme petits et dont la position sera repérée par trois coordonnées, seront appelés des “points matériels”. On appelle ainsi “point matériel” un point doté de masse. Ce concept est donc une idéalisation, souvent utile, de la notion familière d’objet matériel.

2.2) Système matériel :

On appelle “système de points matériels”, ou plus simplement “système matériel”, tout ensemble (fini ou non) de points matériels. Dans le cas des systèmes constitués d’un nombre fini de points, on appelle masse $\boldsymbol{M}$ du système matériel la somme des masses $\boldsymbol{m_i}$ de chacun de ses **n** points :

$$\boldsymbol{M = \sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (2.1)$$

Dans le cas de l’idéalisation d’un objet par un ensemble de points matériels très nombreux et très rapprochés les uns des autres (par exemple faire correspondre un point matériel à chaque atome de l’objet), on facilite les calculs pratiques en adoptant une représentation continue du système, en associant à chaque élément différentiel $\boldsymbol{d\Omega}$ (élément d’une courbe, d’une surface ou d’un volume) une masse élémentaire égale à :

$$\boldsymbol{dm = \eta . d\Omega} \qquad (2.1)$$

$\boldsymbol{\eta}$ Étant la masse unitaire (respectivement par unité de longueur ($\boldsymbol{\eta = \lambda}$), ou par unité de surface ($\boldsymbol{\eta = \sigma}$) ou par unité de volume ($\boldsymbol{\eta = \rho}$)).

La masse totale du système matériel (**S**) aura ainsi l’expression :

$$\boldsymbol{M = \int_{(S)} dm = \int_{(S)} \eta . d\Omega} \qquad (2.3)$$

2.3) Notion de force :

Une force est une action qui peut changer la forme d'un corps, ou modifier son mouvement ou annuler son état stationnaire.

Une force ($\vec{F}$) est une grandeur vectorielle (figure 2.1) caractérisée par :

a) Une origine ou un point d'application (point A).
b) Une direction ou un sens, indiqué par une flèche.
c) Un module (ou intensité) de la force
d) Un support ou une ligne d’action (la droite mn).

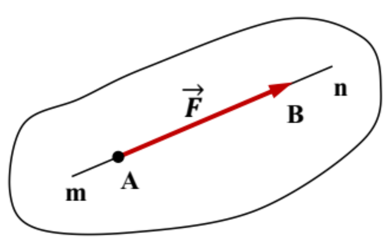


Figure 2.1

2.4) Type de force :

a) Suivant l'action exercée, on distingue généralement deux types de force :

- Force de compression : Force qui pousse sur un corps.
  Elle permet de déplacer, de presser ou d'écraser les objets.
- Force de traction : Force qui tire sur un corps. Elle permet de tirer ou d'étirer un objet.

b) Suivant le mode de répartition, il existe trois types de force :

- Force linéique : Force répartie sur une ligne.
- Force surfacique : Force répartie sur une surface.
- Force volumique : Force appliquée sur un volume.

2.5) Classification de forces :

Soit un système physique composé d'un ensemble d'objets.

- Les forces internes : Elles sont exercées par des objets intérieurs au système.
- Les forces externes : Elles sont exercées par des objets extérieurs au système.

2.6) Exemple :

Si le système étudié est un véhicule, son poids est une force extérieure car elle est appliquée par la pesanteur Terre (qui n'appartient pas au système). Mais si le système étudié est formé de la Terre et du véhicule, le poids du véhicule est une force intérieure (tout comme l'attraction la réaction de la terre sur le véhicule, force exactement opposée au poids).

2.7) Forces concourantes :

Deux (ou plusieurs) forces sont dites concourantes si leurs lignes d'action se coupent en un même point (figure 2.2).

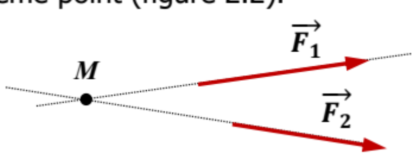
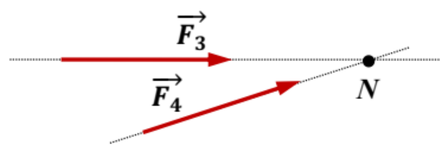


Figure 2.2



2.8) Forces équilibrées :

Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ (figure 2.3) sont dites équilibrées si elles ont la même intensité, elles sont portées par la même ligne d'action et elles sont de sens opposés $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

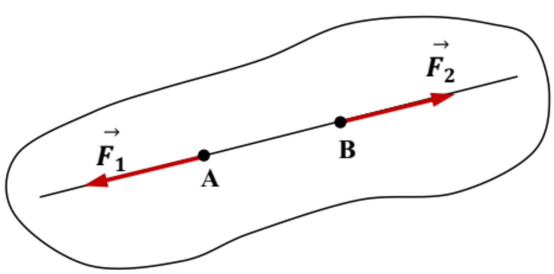


Figure 2.3

*** Conséquence :**

Un solide sous l'action d'une seule force ne peut être jamais en équilibre.

2.9) Composition des forces :

2.9.1) Forces coplanaires non parallèles :

2.9.1.1) Cas de deux forces :

La résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ peut être déterminée par la méthode du parallélogramme des forces (figure 2.4) ou par la construction du triangle des forces (figure 2.5).

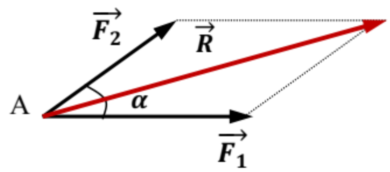


Figure 2.4

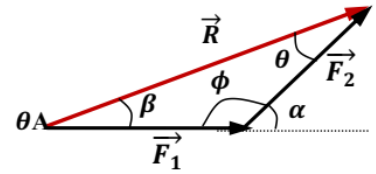


Figure 2.5

Le module de la résultante est donné par la relation suivante :

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2.\|F_1\|.\|F_2\|.\cos\alpha \qquad (2.4)$$

Dans le triangle des forces, on peut appliquer le Théorème des sinus :

$$\frac{F_1}{\sin\theta} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\phi} \qquad (2.5)$$

Démonstration :

Le théorème est démontré par l'intermédiaire du calcul de l'aire d'un triangle. Soit un triangle ABC (figure 2.6) avec $\mathbf{h_1}$ est la hauteur associée à la base **b** et $\mathbf{h_2}$ la hauteur associée à la base **c**.

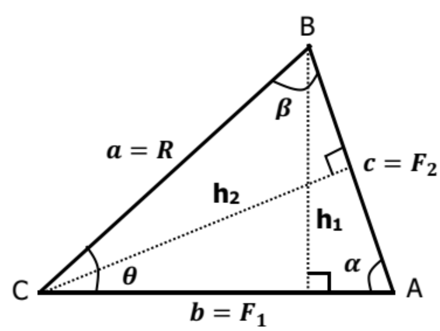


Figure 2.6

L'aire du triangle ABC en fonction de la hauteur et la base associée est :

$$S = \frac{1}{2}(h_1.b) = \frac{1}{2}(h_2.c) \qquad (2.6)$$

Avec : $h_1 = a.\sin\theta = c.\sin\alpha$ et $h_2 = a.\sin\beta = b.\sin\alpha$ (2.7)

D'où : $S = \frac{1}{2}(b.a\sin\theta) = \frac{1}{2}(b.c\sin\alpha) = \frac{1}{2}(c.a\sin\beta)$ (2.8)

En multipliant (2.8) par (2/a.b.c), on obtient :

$$\frac{\sin\theta}{c} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \frac{c}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \qquad (2.9)$$

On remplace **a** et **b** par les forces F_1 et F_2 et **c** par la résultante R on obtient alors l'expression du Théorème des sinus :

$$\frac{F_2}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{F_1}{\sin\beta}$$

2.9.1.2) Cas de plusieurs forces :

La résultante $\vec{R}$ de plusieurs forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 ..... \vec{F}_n$ peut être déterminée par la méthode du polygone des forces (figure 2.7), qui se construit de la façon suivante :

a) Choisir une origine (point O) et une échelle de représentation.

b) Tracer à partir de l'origine, parallèlement à la force $\overrightarrow{F_1}$, un vecteur $\overrightarrow{OA_1}$ représentant, à l'échelle choisie, la force $\overrightarrow{F_1}$.

c) À partir point $\mathbf{A_1}$, parallèlement à la force $\overrightarrow{F_2}$, mener un vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ représentant, à l'échelle choisie, la force $\overrightarrow{F_2}$.

d) À partir point $\mathbf{A_2}$ tracer un vecteur $\overrightarrow{A_2A_3}$ représentant, à l'échelle choisie, la force $\overrightarrow{F_3}$.

e) Répéter la même opération jusqu'au vecteur $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ représentant la force $\overrightarrow{F_n}$.

f) Joindre l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur (pont $\mathbf{A_n}$). Le vecteur ainsi obtenu.

$\overrightarrow{A_nO} = \vec{R}$ Représente la somme géométrique (la résultante) des forces $\vec{F}_i$.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2.10)$$

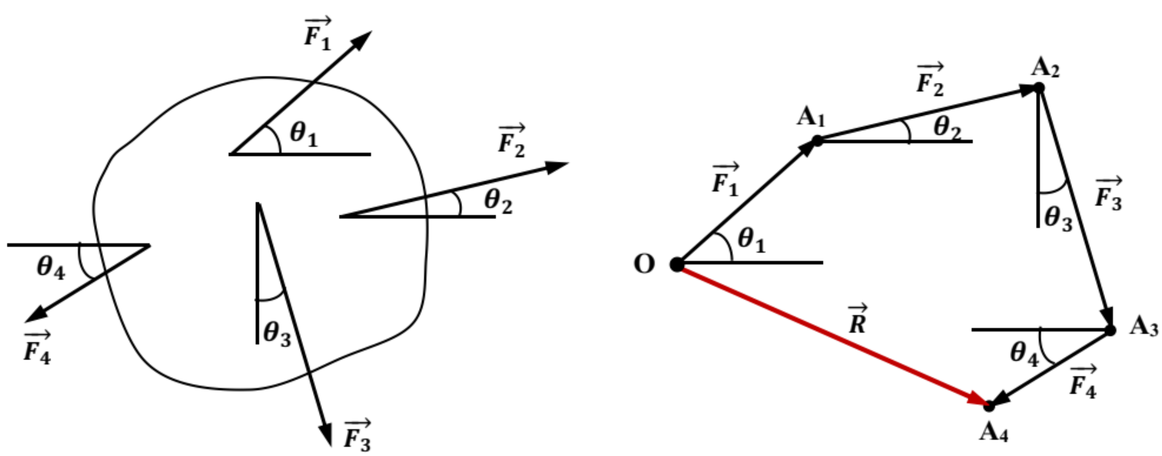


Figure 2.7

2.9.2) Remarque :

* L'intensité et le sens de la résultante $\vec{R}$ ne dépendent pas de l'ordre de représentation des forces.

* Le polygone représentant les forces et la résultante est appelé : Polygone des forces.

* Dans la construction du polygone des forces les vecteurs représentant les forces sont dirigés dans le même sens et le vecteur représentant la résultante est dirigé dans le sens contraire (figure 2.7).

2.9.3) Forces coplanaires parallèles :

2.9.3.1) Cas de forces parallèles de même sens :

On considère deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ parallèles de mêmes sens appliquées à un solide respectivement aux points A et B. (figure 2.8).

Appliquons aux points A et B deux forces équilibrées $\vec{S_1}$et $\vec{S_2}$ $(\vec{S_1} = -\vec{S_2})$ suivant la direction AB, soient $\vec{T_1}$et $\vec{T_2}$ les résultantes respectivement de $(\vec{S_1}, \vec{F_1})$ et $(\vec{S_2}, \vec{F_2})$. $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ sont concourantes leurs lignes d'action se coupent au point M.

Déplaçons $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ au point M, et décomposons-les en leurs composantes initiales qui sont respectivement $(\vec{S'_1}, \vec{F'_1})$ et $(\vec{S'_2}, \vec{F'_2})$.

En simplifiant $\vec{S'_1}$, et $\vec{S'_2}$ (forces équilibrées) on obtient alors deux forces $\vec{F'_1}$ et $\vec{F'_2}$ de même sens et de même support. Ainsi donc les deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ appliquées en A et B sont équivalentes aux force $\vec{F'_1}$ et $\vec{F'_2}$($\vec{F_1} = \vec{F'_1}$ et $\vec{F_2} = \vec{F'_2}$) appliquées au point M.

Leur résultante $\vec{R} = \vec{F'_1} + \vec{F'_2} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$est dirigée suivant la droit MC et appliquée au point C déterminé à l'aide des relations suivantes :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{R} \qquad (2.11)$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{F_1}{R} \qquad (2.12)$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \qquad (2.13)$$

*** Démonstration des relations :**

Considérons les triangles semblables MCB avec MNP et MCA avec MLK (figure 2.8).

Dans les triangles MCB et MNP on peut écrire :

$$\frac{BC}{CM} = \frac{PN}{MN} = \frac{S'_2}{F'_2} = \frac{S_2}{F_2} \Rightarrow BC.F_2 = CM.S_2 \qquad (2.14)$$

Dans les triangles MCA et MLK on peut écrire :

$$\frac{AC}{CM} = \frac{KL}{ML} = \frac{S'_1}{F'_1} = \frac{S_1}{F_1} \Rightarrow AC.F_1 = CM.S_1 \qquad (2.15)$$

Nous avons : $CM.S_1 = CM.S_2$ $(S_1 = S_2)$, les relations (2.14) et (2.15) donnent :

$$AC.F_1 = BC.F_2 \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \qquad (2.16)$$

D'autre part on peut écrire :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AC}{AC + BC} = \frac{BC.F_2}{F_1(AC + BC)} = \frac{BC.F_2}{AC.F_1 + BC.F_1)} = \frac{BC.F_2}{BC.F_2 + BC.F_1}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{BC.F_2}{BC(F_1+F_2)} = \frac{F_2}{F_1+F_2} = \frac{F_2}{R} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{F_2}{R} \qquad (2.17)$$

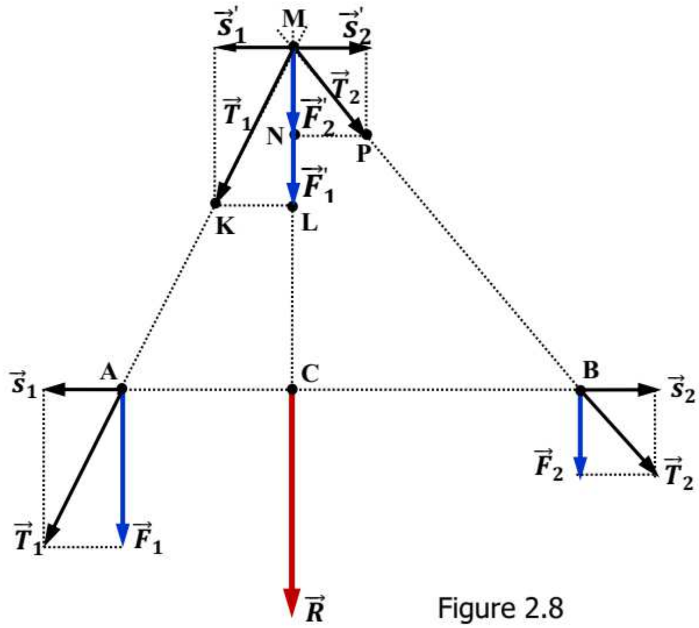


Figure 2.8

*** Conclusion :**

Deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, parallèles et de même sens, appliquées à un solide respectivement aux points A et B admettent une résultante unique $\vec{R}$ qui leur est parallèle et de même sens et dont le module est égal à la somme des modules des deux forces. La ligne d'action de la résultante passe par le point C qui partage la distance entre les points A et B en parties inversement proportionnelles à leurs modules.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{F_2}{F_1} \qquad (2.18)$$

2.9.3.2) Cas de forces parallèles de sens opposés :

La résultante $\vec{R}$ de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2\,(\vec{F}_1 > \vec{F}_2)$ parallèles et de sens contraire appliquées à un solide aux points respectivement A et B (figure 2.9) peut être déterminée de la façon suivante :

On décompose la plus grande $\vec{F}_1$ en deux forces parallèles et de même sens la première $\vec{T} = -\vec{F}_2$ appliquée au point B et la deuxième $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{T} = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2)$ appliquée au point C définit par la relation :

$$\frac{AC}{F_2} = \frac{AB}{R} \qquad (2.19)$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{F_1}{F_2} \qquad (2.20)$$

$\vec{F}_2$ et $\vec{T}$ forment un système de forces équilibrées ($\vec{T} = -\vec{F}_2$), elles se compensent. Il reste donc seulement la force $\vec{R}$ qui est la résultante des forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \qquad (2.21)$$

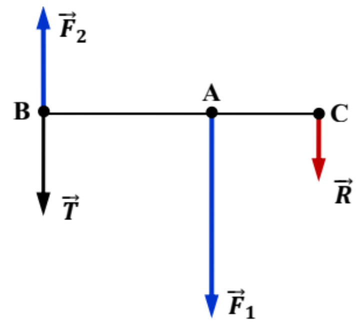


Figure 2.9

Conclusion :

La résultante de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ $(\vec{F}_1 > \vec{F}_2)$ parallèles et de sens opposés a un module égal à la différence des modules des forces $(R = F_1 - F_1)$, elle est dirigée dans le sens de la plus grande.

Son point d'application C est situé à l'extérieur de la droite AB à des distances inversement proportionnelles aux modules des forces.

$$\frac{BC}{F_1} = \frac{AC}{F_2} \qquad (2.22).$$

2.9.4) Couple de forces :

2.9.4.1) Définition :

Un couple est formé de deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ parallèles de même module et de sens opposés.

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ (figure 2.10). Les deux forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ ne forment pas un système de forces équilibré.

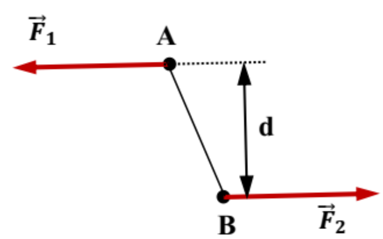


Figure 2.10

2.9.4.2) Remarque :

Un couple de forces ne peut être ni équilibré ni remplacé par une seule force (pas de résultante), et son action se réduit à une rotation du solide.

2.9.4.3) Moment d'un couple de forces :

Le module du moment $\vec{M}$ d'un couple de forces (figure 2.11) est égal au produit du module de l'une des forces par le bras de levier du couple (distance **d**) :

$$M = \pm\, d.F \qquad (2.23)$$

2.9.4.4) Signe du moment d'un couple :

Par convention le moment du couple est positif lorsqu'il donne une rotation dans le sens trigonométrique (sens antihoraire), dans le cas contraire il est négatif (figure 2.11).

Figure 2.11

2.9.5) Forces non coplanaires :

La résultante $\vec{R}$ de trois forces non coplanaires $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$ peut être déterminée par la règle du parallélépipède. La résultante $\vec{R}$ est représentée par la diagonale du parallélépipède formé par les trois forces (figure 2.12).

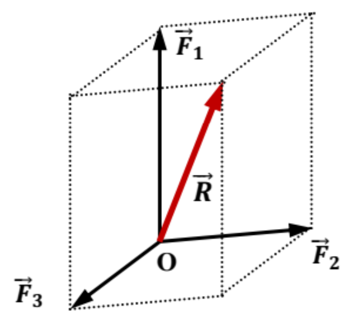


Figure 2.12

2.9.5.1) Décomposition de forces :

La décomposition d'une force $\vec{F}$ donnée consiste à trouver un système de deux (ou plusieurs) forces dont elle est la résultante.

*** Remarque :**

Les forces sont décomposées suivant les directions des réactions des éléments sur lesquels sont appliquées ces forces.

2.10) Corps solide :

En statique, un corps (S) est considéré comme solide lorsque les déformations provoquées par les forces exercées sont négligeables par rapport aux dimensions de ce corps.

Les distances mutuelles de tous ses éléments matériels (ses points) restent constamment inchangées (figure 2.13).

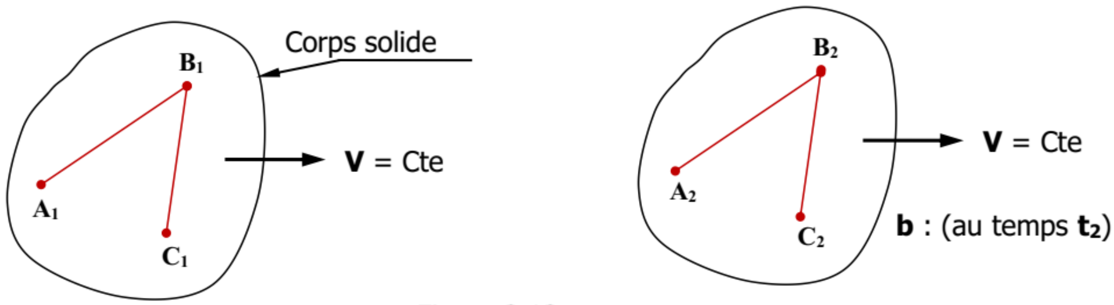


Figure 2.13

Au temps t_2 supérieur au temps t_1, nous avons la distance $A_2B_2=A_1B_1$ et la distance $B_2C_2=B_1C_1$.

2.11) Corps en équilibre :

Un corps est en équilibre par rapport à un repère R si les paramètres qui définissent sa position dans ce repère sont constants au cours du temps.

Si le repère par rapport auquel on étudie l'équilibre est immobile l'équilibre est **absolu,** dans le cas contraire l'équilibre est **relatif**.

En statique on considère comme équilibre absolu tout équilibre calculé par rapport à la terre ou par rapport aux repères (corps) rigidement liés à la terre.

2.12) Exemple 2.1 :

Une console est composée des deux tiges AC horizontale et BC inclinée d'un angle $\boldsymbol{\alpha}$ sur la verticale. Les deux tiges sont articulées entre elles par une charnière au point C (figure 2.14). Un poids $\vec{\boldsymbol{P}}$ est suspendu au point C.

En négligeant le poids des tiges trouver les réactions des articulations A et B.

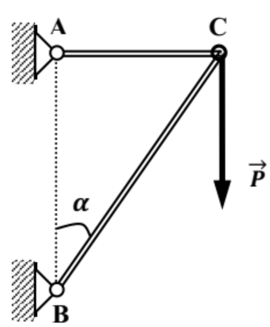


Figure 2.14

Solution 2.1 :

Sous l'action de la force $\vec{\boldsymbol{P}}$ les tiges AC et BC sont soumises respectivement à une attraction et à une compression, alors les réactions ont les mêmes directions que les tiges (figure 2.15).

On décompose la force $\vec{\boldsymbol{P}}$ en deux composantes $\vec{\boldsymbol{P}}_a = -\vec{\boldsymbol{R}}_a$ et $\vec{\boldsymbol{P}}_b = -\vec{\boldsymbol{R}}_b$ (figure 2.16) et on trace le triangle des forces $\vec{\boldsymbol{P}}_a$, $\vec{\boldsymbol{P}}_b$ et $\vec{\boldsymbol{P}}$ (figure 2.17).

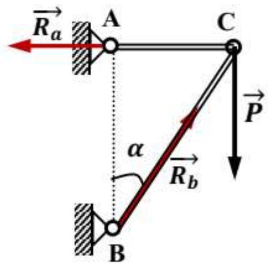


Figure 2.15

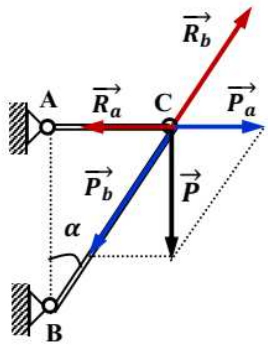


Figure 2.16

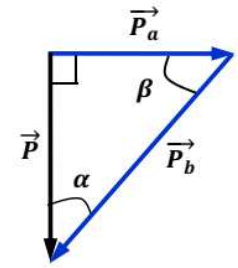


Figure 2.17

D'après le théorème des sinus nous avons :

$$\frac{P_a}{\sin\alpha} = \frac{P_b}{\sin(\pi/2)} = \frac{P}{\sin\beta} = \frac{P}{\sin(\pi/2-\alpha)} = \frac{P}{\cos\alpha}$$

La réaction de l'articulation **A** est : $R_a = P_a = P.tg\alpha$

La réaction de l'articulation **B** est : $R_b = P_b = P/cos\alpha$